

THÈSES

PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR
Raymond SIESTRUNCK

1^{re} THÈSE

ÉCOULEMENTS A POTENTIEL DANS LES MACHINES HÉLICOIDALES SIMPLES

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 8 Juillet 1947 devant la Commission d'examen

Jury { MM. J. CABANNES
H. VILLAT
A. FOCH

{ Président
Examineurs

SIESTRUNCK (Raymond)

Écoulements à potentiel
dans les machines hélicoïdales
simples.

Paris, Éditions de l'O. N. E. R. A.,
1949, in-4°, 60 p.

Th. Sc. ph. Paris 1947, No 3.101

SIESTRUNCK (Raymond)

Écoulements à potentiel
dans les machines hélicoïdales
simples.

Paris, Éditions de l'O. N. E. R. A.,
1949, in-4°, 60 p.

Th. Sc. ph. Paris 1947, No 3.101

SIESTRUNCK (Raymond)

Écoulements à potentiel
dans les machines hélicoïdales
simples.

Paris, Éditions de l'O. N. E. R. A.,
1949, in-4°, 60 p.

Th. Sc. ph. Paris 1947, No 3.101

SIESTRUNCK (Raymond)

Écoulements à potentiel
dans les machines hélicoïdales
simples.

Paris, Éditions de l'O. N. E. R. A.,
1949, in-4°, 60 p.

Th. Sc. ph. Paris 1947, No 3.101

THÈSES

PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR
Raymond SIESTRUNCK

1^{re} THÈSE

ÉCOULEMENTS À POTENTIEL DANS LES MACHINES HÉLICOIDALES SIMPLES

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 8 Juillet 1947 devant la Commission d'examen

Jury { MM. J. CABANNES
H. VILLAT
A. FOCH

{ Président
Examineurs



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen. M. J. CABANNES.

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM.T	Botanique.	Jacques BOURCART. . .	Géographie physique et Géologie dynamique.
G. JULIA.T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	M ^{me} JOLIO-CURIE. T	Physique générale et Radio- activité.
C. MAUGUIN.T	Minéralogie.	PLANTEFOL.T	Botanique.
A. DENJOY.T	Théorie des Fonctions.	CABANNES.T	Recherches physiques.
L. LUTAUD.T	Géographie physique et géo- logie dynamique.	GRASSÉ.T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
E. DARMOIS.T	Enseignement de Physique.	PREVOST.	Chimie organique.
Robert LÉVY.T	Physiologie comparée.	BOULIGAND.T	Application de l'analyse à la Géométrie.
Henri VILLAT.T	Mécanique des fluides et applications.	CHAUDRON.T	Chimie.
Ch. JACOB.T	Géologie.	WYART.	Minéralogie.
P. PASCAL.T	Chimie générale.	TEISSIER.T	Zoologie.
M. FRÉCHET.T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	MANGENOT.T	Biologie végétale.
M ^{me} RAMART-LUCAS. T	Chimie organique.	P. AUGER.T	Physique quantique et rela- tivité.
H. BÉGHIN.T	Mécanique physique et expé- rimentale.	MONNIER.	Physiologie générale.
FOCH.T	Mécanique expérimentale des fluides.	PIVETEAU.	Géologie.
PAUTHENIER.T	Electrotechnique générale.	ROCARD.T	Physique.
DE BROGLIE.T	Théories physiques.	H. CARTAN.	Calcul différentiel.
JOB.T	Chimie générale.	SCHAEFFER.T	Physiologie des fonctions.
PRENANT.T	Anatomie et Histologie com- parées.	LAFFITTE.	Chimie (P. C. B.).
VILLEY.T	Mécanique appliquée.	LERAY.	Mécanique théorique des fluides.
COMBES.T	Physiologie végétale.	FAVART.	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
GARNIER.T	Géométrie supérieure.	COULOMB.T	Physique du globe.
PÉRÈS.T	Mécanique rationnelle.	M ^{lle} COUSIN.	Biologie animale (P.C.B.).
HACKSPILL.T	Chimie minérale.	CHRÉTIEN.	Analyse et mesures chimiques.
LAUGIER.T	Physiologie générale.	DRACH.	Evolution des êtres orga- nisés.
TOUSSAINT.T	Technique Aéronautique.	CHATELET.T	Arithmétique et théorie des nombres.
M. CURIE.T	Physique (P. C. B.).	EPHRUSSI.T	Génétique.
G. RIBAUD.T	Hautes températures.	WURMSER.T	Biologie physico-chimique.
CHAZY.T	Mécanique analytique.	KASTLER.	Physique.
H. GAULT.T	Chimie appliquée.	BAUER.T	Chimie - Physique.
CROZE.T	Physique théorique et physi- que céleste.	RIVIERE.	Géologie (P.C.B.).
DUPONT.T	Théories chimiques.	GAUTHERET.	Biologie Végétale (P.C.B.).
LANQUINE.T	Géologie structurale et géo- logie appliquée.	LUCAS.	Physique.
VALIRON.T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	MAX MORAND.	Physique.
BARRABÉ.	Géologie structurale et géo- logie appliquée.	ARNULF.	Optique appliquée.
VAVON.T	Analyse et mesures chimi- ques.	A. THOMAS.	Zoologie.
G. DARMOIS.T	Mathématiques générales.	SOLEILLET.	Physique.
CHATTON.T	Biologie maritime.	FORTIER.	Mécanique expérimentale des fluides.
AUBEL.T	Chimie biologique.	DANJON.T	Astronomie.
		FROMAGEOT.	Chimie Biologique.
		LAPORTE.	Physique générale et Radio- activité.

Secrétaire. Ch. MONIER.

TABLE DES MATIÈRES

1. — QUELQUES PROPRIETES DES POTENTIELS HELICOI- DAUX ATTACHES AU FONCTIONNEMENT DE L'HE- LICE.	9
1.1. — L'hélice infiniment peu chargée, potentiel des vitesses induites.	9
1.2. — Equation du fonctionnement aérodynamique de l'hélice infini- ment peu chargée.	17
1.3. — Hélices optima infiniment peu chargées.	21
1.4. — L'hélice moyennement chargée, pas réel des tourbillons.	26
2. — METHODE D'ANALOGIE ELECTRIQUE POUR L'INTE- GRATION DES PROBLMES DE L'HELICE.	30
2.1. — Solution de l'équation de GOLDSTEIN par analogie électrique	30
2.2. — Montage calculateur d'hélice.	35
2.3. — Vérification au moyen des solutions de GOLDSTEIN.	40
2.4. — Exemples d'emplois du calculateur d'hélices.	43
2.5. — Les bassins à profondeur variable.	50
3. — CORRECTIONS DE PAROIS POTENTIELS HELICOID AUX GENERALISES.	52
3.1. — Problème général des corrections de parois.	52
3.2. — Solution générale du problème des corrections de parois.	56
3.3. — Généralisation aux machines axiales simples.	60

I. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POTENTIELS HÉLICOIDaux ATTACHÉS AU FONCTIONNEMENT DE L'HÉLICE

1.0. — Nous présentons dans ce chapitre les propriétés essentielles du potentiel des vitesses induites qui interviennent dans la théorie tourbillonnaire de l'hélice; pour tous les rappels concernant les hypothèses de la théorie, ainsi que pour certaines démonstrations, nous renvoyons à notre livre « Développement moderne de la Théorie de l'Hélice », désigné dans le texte par (H), et qui contient déjà un certain nombre des développements qui suivent. Toutefois, nous avons adopté ici un exposé qui ne fait intervenir les vitesses induites par le système tourbillonnaire libre que par le potentiel dont elles dérivent; c'est le point de vue qui se prête le mieux aux généralisations ultérieures, et notamment à la mise en œuvre du procédé d'analogies électriques.

I. 1. L'HÉLICE INFINIMENT PEU CHARGÉE ; POTENTIEL DES VITESSES INDUITES

1.1.1. Axes et Notations. — Considérons une hélice à p pales, de rayon R , à laquelle nous lions un système d'axes trirectangle direct $Oxyz$ tel que Ox soit pris suivant l'axe de l'une des pales, Oz coïncidant avec l'axe de l'hélice; pour fixer les idées, nous supposons que, lorsque l'hélice avance avec la vitesse V suivant son axe, autour duquel elle possède d'autre part la vitesse angulaire de rotation ω , le champ des vitesses relatives du fluide qui aborde les pales résulte de la translation $\vec{V}$ et de la rotation $\vec{\omega}$, mesurées toutes les deux positivement suivant Oz : ce qui implique que Oz soit dirigé vers l'aval et que l'hélice soit une hélice « à droite », choix qui ne restreint pas la portée des formules ultérieures.

Dans ce système lié à l'hélice, nous utiliserons les coordonnées semi-polaires ξ, θ, z , parmi lesquelles le rayon vecteur ξ et la cote z , comme *toutes les longueurs* qui pourront intervenir par la suite, sont mesurées avec une unité de longueur égale au rayon R de l'hélice, et constituent donc des grandeurs sans dimensions: sur la pale qui porte Ox , on aura par exemple $\xi = x/R$. De même, les grandeurs cinématiques que nous allons introduire seront toujours réduites à l'état de coefficients sans dimensions, les *vitesses* étant rapportées à la vitesse périphérique ωR et les *circulations* ou *potentiels des vitesses* à la quantité ωR^2 ; ainsi, le paramètre de fonctionnement de l'hélice:

$$\lambda = V/\omega R$$

remplacera la vitesse d'avancement V ; quant à la composante relative due à la rotation, égale à ωx , elle s'exprimera par le même nombre ξ que le rayon vecteur du point auquel on la calcule.

1.1.2. Système tourbillonnaire. — Dans le fonctionnement propulsif de l'hélice, le bord de fuite de chaque pale engendre une surface de discontinuité des vitesses, qui, du point de vue cinématique, peut être considérée comme une surface de tourbillons libres. Lorsque l'hélice est peu chargée, ces nappes tourbillonnaires ont une désagrégation assez lente sous l'effet du « souffle » pour qu'on puisse les définir géométriquement comme lieu des lignes de courant de l'écoulement relatif (supposé non perturbé par la présence de l'hélice) qui ont rencontré les bords de fuite; ces derniers étant assimilés aux p segments de droite:

$$z = 0, \quad \theta = \frac{2k\pi}{p} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1), \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

le système tourbillonnaire a pour support p portions d'hélicoïdes de pas géométrique $h = 2\pi V/\omega$. Si nous remarquons que le pas réduit $h/2\pi R$ n'est autre que le paramètre de fonctionnement λ , nous voyons que les conditions analytiques qui définissent les surfaces de discontinuité sont (1) :

$$(I, 1) \quad \theta - z/\lambda = \frac{2k\pi}{p} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1), \quad z \geq 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Pour développer commodément la théorie tourbillonnaire, il est avantageux de lever la restriction $z \geq 0$, c'est-à-dire de considérer des nappes s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$ autour de Oz , et c'est le système porté par les surfaces

$$(I, 2) \quad \theta - z/\lambda = \frac{2k\pi}{p} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1), \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

qui sera utilisé par la suite. On sait (H.15) que les vitesses axiales et tangentielles induites *sur une pale* par ce système sont doubles de celles induites par le système réel porté par les surfaces (I,1).

1.1.3. Potentiel des vitesses induites. — Soit $\Gamma(\xi)$ la circulation autour de chaque pale en fonction de la distance au moyeu; ce dernier est constitué actuellement par l'axe de l'hélice, et on a aux extrémités des pales les relations

$$(I, 3) \quad \Gamma(0) = \Gamma(1) = 0.$$

Du profil d'abscisse ξ est issu un tube tourbillon de densité de circulation $-d\Gamma/d\xi$; dans tout l'espace, duquel on a retranché ces tubes qui constituent les surfaces (I,2), le champ des vitesses induites par le système tourbillonnaire libre dérive d'un potentiel φ qui est une fonction harmonique des variables ξ, θ, z :

$$(I, 4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

1.1.4. — Ce potentiel n'est uniforme que dans un domaine (D) dont la connexion est telle que tout circuit fermé décrit dans (D) entoure un échappement tourbillonnaire de circulation globale nulle; étant donné que, d'après (I,3), l'intensité tourbillonnaire totale émise par chaque pale est nulle, il est clair que l'uniformisation de φ est obtenue par le système de surfaces-coupures (I,2). En deux points situés au rayon ξ et infiniment voisins de part et d'autre d'une de ces coupures, φ prend des valeurs différant entre elles d'une quantité égale à la circulation qui s'échappe des bords de fuite entre le point d'abscisse ξ et l'extrémité $\xi = 1$ de la pale, c'est-à-dire:

$$\int_{\xi}^1 \left(-\frac{d\Gamma}{d\xi} \right) d\xi = \Gamma(\xi).$$

1.1.5. — D'autre part, dans les composantes semi-polaires des vitesses induites

$$(I, 5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

z et θ n'interviennent que par le groupement $\zeta = \theta - z/\lambda$, propriété qui traduit la symétrie hélicoïdale du champ. En posant

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = f(\xi, \zeta), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = g(\xi, \zeta), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = h(\xi, \zeta),$$

il vient

$$d\varphi = f d\xi + g d\zeta + \left(h + \frac{g}{\lambda} \right) dz;$$

(1) Comme nous l'avons précisé, ce schéma suppose que l'hélice ne perturbe pas l'écoulement relatif, dont en particulier le caractère permanent n'est pas altéré; nous verrons plus loin dans quelle mesure on peut tenir compte des modifications subies dans le sillage par les nappes tourbillonnaires, lorsque l'hélice n'est plus infiniment peu chargée.

$h + g/\lambda$ est donc une constante C , et, en introduisant la fonction $\Phi(\xi, \zeta)$ qui a pour différentielle $fd\xi + gd\zeta$, on a

$$\varphi = \Phi(\xi, \zeta) + Cz.$$

Mais, d'après les formules de Poincaré, la vitesse induite par le système tourbillonnaire doit tendre vers zéro lorsque ξ tend vers l'infini; il en résulte en particulier, pour la composante axiale,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = C\lambda.$$

La circulation globale, calculée sur un cercle d'axe Oz et de rayon ξ très grand, est donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta = 2\pi \lambda C.$$

Cette circulation globale est nulle dans le cas en question, de sorte que la constante C est nulle: le potentiel des vitesses φ s'identifie avec Φ et ne dépend que des variables ξ et ζ . Etant donné les relations

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2},$$

φ satisfait à l'équation de Goldstein

$$(I, 6) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\xi^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0.$$

On a d'autre part les formules

$$(I, 7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

qui relie en un point quelconque de l'espace les composantes tangentielle et axiale des vitesses dérivant de φ .

1.1.6. — Avec les variables ξ et ζ , interprétées respectivement comme rayon vecteur et angle polaire, les surfaces (1,2) donnent le système de segments étoilés

$$(I, 8) \quad \zeta = \frac{2k\pi}{p}, \quad (k = 0, 1, \dots, p-1), \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

formant coupures. Il est alors aisé de restreindre le domaine d'étude des potentiels qui interviennent dans la théorie de l'hélice de la façon suivante:

a) La symétrie hélicoïdale du champ de vitesses (et des potentiels) s'accompagne de la propriété de *périodicité* de ce champ, et par conséquent de φ (1), par rapport à ζ , avec la période $2\pi/p$ représentant la distance angulaire de deux pales consécutives: c'est ce que nous appellerons la *symétrie hélicoïdale d'ordre p* . Il suffit donc d'étudier φ dans le domaine.

$$0 \leq \zeta \leq 2\pi/p;$$

b) Comme nous l'avons remarqué, les coupures (I,8) sont des lieux de discontinuité de φ ; les potentiels n'étant définis qu'à une constante additive arbitraire près, nous pouvons toujours faire choix de celle-ci (2) de façon que l'on ait de part et d'autre d'une coupure, à la distance ξ du moyeu

$$\varphi^+ = \frac{\Gamma(\xi)}{2}, \quad \varphi^- = -\frac{\Gamma(\xi)}{2},$$

(1) Le changement de ζ en $\zeta + 2\pi/p$ pourrait en effet tout au plus augmenter φ d'une constante. Mais cette constante est nécessairement zéro parce que, la circulation globale étant nulle, φ a la période 2π par rapport à ζ .

(2) Voir par exemple H.20.

φ étant alors nul sur les prolongements des coupures:

$$\zeta = \frac{2k\pi}{p}, \quad \zeta > 1.$$

Cette propriété, jointe à la symétrie hélicoïdale d'ordre p , entraîne à l'intérieur de l'un quelconque des secteurs

$$\frac{2k\pi}{p} \leq \zeta \leq \frac{2(k+1)\pi}{p}$$

une symétrie impaire de φ par rapport à la surface

$$\zeta = \frac{(2k+1)\pi}{p},$$

sur laquelle φ s'annulera nécessairement aussi. On peut donc, en définitive, se limiter dans l'étude des potentiels hélicoïdaux, au domaine

$$(I, 9) \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{\pi}{p},$$

que nous considérerons uniquement par la suite; les conditions aux limites seront, quelle que soit l'hélice envisagée,

$$(I, 10) \quad \varphi = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \pi/p \\ \zeta = 0, \quad \zeta > 1, \end{array} \right.$$

avec, sur le bord de la coupure intérieur au domaine (I,9)

$$\varphi(\zeta) = \varphi + \frac{\Gamma(\zeta)}{2};$$

pour connaître φ dans tout son domaine de définition, il suffira de prolonger la répartition connue dans (I,9) par une suite de symétries impaires par rapport aux frontières.

1.1.7. Solution fondamentale. — Il est aisé de former une solution de l'équation (I,6) jouant un rôle analogue à celui de $\log r$ pour l'équation de Laplace à deux variables.

Considérons, en effet, une hélice, de pas géométrique $2\pi\lambda$, tracée sur un cylindre de rayon ξ_0 , et rencontrant le plan xOy au point d'angle polaire θ_0 : le potentiel Newtonien de cette hélice, chargée uniformément avec la densité $-1/2$, est une fonction harmonique qui présente la symétrie hélicoïdale et qui se comporte, au voisinage de la ligne chargée, comme le logarithme de la distance normale à l'hélice (1).

Pour éviter les difficultés de calcul de ce potentiel provenant des limites infinies d'intégration, nous considérons simultanément le potentiel de Oz chargé avec la densité $\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}/2\lambda$; dans ces conditions, l'intégrale

$$f(\zeta, \theta, z) = -\frac{\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\xi_0^2 - 2\xi_0\zeta \cos(\theta - t) + \xi_0^2 + [\lambda(t - \theta_0) - z]^2}} - \frac{dt}{\sqrt{\xi_0^2 + (\lambda t - z)^2}}$$

est convergente.

(1) Soit pour un instant $Oxyz$ le trièdre de Frénet d'une courbe gauche (C) en un point O, origine des abscisses curvilignes s ; R désignant le rayon de courbure en ce point, la distance d'un point quelconque M au point de la courbe d'abscisse curviligne s est, au 3^e ordre près en s : $r^2 = OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2sx + s^2(1-y/R)$.

Dans le calcul du potentiel de (C) en M, séparons la contribution de l'arc $|s| \leq \varepsilon$, ε étant arbitrairement petit; la singularité du potentiel lorsque $M \rightarrow O$ est celle de

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{ds}{OM} \sim \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2sx + s^2(1-y/R)}},$$

intégrale élémentaire, qui se comporte comme $-\log(y^2 + z^2)$ lorsque x, y, z sont petits; seule intervient donc la composante de OM parallèle au plan normal yOz .

Le changement de variable $t - \theta_0 - z/\lambda = u$, effectué sur la première partie de l'élément différentiel, met en évidence la symétrie hélicoïdale de ce terme; comme le potentiel de l'axe Oz ne dépend évidemment pas de z , on peut aussi bien écrire

$$f(\xi, \theta, z) = F(\xi, \zeta) = -\frac{\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi\xi_0 \cos(\zeta - \theta_0 - u) + \xi_0^2 + \lambda^2 u^2}} - \frac{du}{\sqrt{\xi^2 + \lambda^2 u^2}},$$

et même, pour plus de symétrie, remplacer dans cette expression θ_0 par ξ_0 , puisque les équations de l'hélice génératrice sont

$$\xi = \xi_0, \quad \zeta = \theta_0.$$

1.1.8. — La méthode de développement de Lamb (H.17) appliquée à la fonction F périodique en ξ donne immédiatement ses coefficients de Fourier. Seuls subsistent les termes pairs en ξ dont les coefficients sont des fonctions de Bessel modifiées, sauf le premier A_0 , dans lequel on doit retrouver la singularité logarithmique due à l'axe Oz; on a en effet, en considérant d'abord une portion finie de l'intervalle d'intégration:

$$\alpha_0 = -\frac{4\pi A_0}{\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\zeta \int_{-h}^{+h} \frac{du}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi\xi_0 \cos(\zeta - \xi_0 - u) + \xi_0^2 + \lambda^2 u^2}} - \frac{du}{\sqrt{\xi^2 + \lambda^2 u^2}}.$$

Deux interversions successives de l'ordre des intégrations permettent d'écrire aussi:

$$\alpha_0 = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\zeta \int_{-h}^{+h} \frac{du}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi\xi_0 \cos(\zeta - \xi_0) + \xi_0^2 + \lambda^2 u^2}} - \frac{du}{\sqrt{\lambda^2 u^2 + \xi^2}},$$

où, Δ^2 désignant la quantité $\xi^2 - 2\xi\xi_0 \cos(\zeta - \xi_0) + \xi_0^2$:

$$\alpha_0 = \frac{2}{\lambda} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \log \left(\frac{h + \sqrt{\Delta^2 + h^2}}{h + \sqrt{\xi^2 + h^2}} \cdot \frac{\xi}{\Delta} \right) d\zeta = \frac{2}{\lambda} \int_0^{2\pi} \log \frac{\xi}{\Delta} d\zeta;$$

il reste donc:

$$\frac{\lambda \alpha_0}{2} = 2\pi \log \xi - \int_0^{2\pi} \log \Delta^2 d\zeta,$$

intégrale classique qui donne:

$$A_0 = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}}{\lambda} \log \frac{\xi}{\xi_0} & \xi < \xi_0 \\ 0 & \xi > \xi_0. \end{cases}$$

1.1.9. — Nous savons (H.15) qu'en prenant dans le développement ainsi obtenu pour F les termes de p en p seulement à partir de A_0 , après les avoir multipliés par p , nous obtiendrons le développement en série de Fourier d'une solution fondamentale de l'équation (I.6) présentant la symétrie hélicoïdale d'ordre p . On a ainsi, en désignant par M une hélice quelconque (ξ, ζ) de l'espace et par M_0 l'hélice particulière (ξ_0, ζ_0) qui a servi de génératrice à F (1)

(1) Nous n'insisterons pas sur la convergence de ces développements et de ceux qu'on en déduit par la suite; on s'en assure immédiatement en substituant aux fonctions de Bessel leurs développements asymptotiques classiques.

$$(I, 11) \quad F_p(M, M_0) = \begin{cases} = \frac{2p\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}}{\lambda} \left[-\frac{1}{2} \log \frac{\xi}{\xi_0} + \sum_{n=1}^{\infty} K_{np} \left(\frac{np\xi_0}{\lambda} \right) I_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right) \cos np(\xi - \xi_0) \right] & \xi < \xi_0 \\ = \frac{2p\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} K_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right) I_{np} \left(\frac{np\xi_0}{\lambda} \right) \cos np(\xi - \xi_0) & \xi > \xi_0 \end{cases}$$

La fonction F_p représente le potentiel Newtonien des p hélices géométriques (de même densité de charge $— 1/2$)

$$\xi = \xi_0, \quad \xi = \xi_0 + \frac{2k\pi}{p} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1),$$

et de l'axe Oz chargé avec la densité $p\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}/2\lambda$. $\bar{M}_0$ désignant l'hélice dont le point image dans le plan (ξ, ζ) est imaginaire conjugué de M_0 , soit $(\xi_0, -\zeta_0)$, il est clair que la fonction $F_p(M, \bar{M}_0)$ n'a pas de singularité dans le domaine (I,9) lorsque M_0 se trouve dans ce domaine; par conséquent, la fonction

$$G_p(M, M_0) = F_p(M, M_0) - F_p(M, \bar{M}_0)$$

qui admet les développements

$$(I, 12) \quad G_p(M, M_0) = \begin{cases} \frac{4p\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} K_{np} \left(\frac{np\xi_0}{\lambda} \right) I_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right) \sin np\xi \sin np\xi_0 & \xi < \xi_0 \\ \frac{4p\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} K_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right) I_{np} \left(\frac{np\xi_0}{\lambda} \right) \sin np\xi \sin np\xi_0 & \xi > \xi_0 \end{cases}$$

jouera pour le domaine (I,9), dans lequel elle présente le lieu de singularités logarithmiques M_0 et aux frontières duquel elle s'annule, le rôle de fonction de Green. De même, on aura par la combinaison

$$N_p(M, M_0) = F_p(M, M_0) + F_p(M, \bar{M}_0)$$

une fonction ayant dans (I,9), des singularités logarithmiques sur M_0 et sur Oz , et dont la dérivée $dN_p/d\xi$ s'annule au contour.

1.1.10. Formule de Green. — Considérons le secteur hélicoïdal (D), de hauteur ε , défini par

$$0 \leq \xi \leq \pi/p, \quad 0 \leq z \leq \varepsilon;$$

orientons les normales aux surfaces limitant (D) vers l'intérieur du domaine: un potentiel hélicoïdal φ uniforme reprend même valeur en des points des deux plans $z=0$, $z=\varepsilon$ situés sur une même hélice; mais étant donné la convention d'orientation des normales, une dérivée telle que $d\varphi/dn$ prend en ces mêmes points des valeurs opposées; d'autre part, ε étant choisi suffisamment petit, l'élément de surface d'un hélicoïde sera au rayon ε :

$$d\sigma = \varepsilon \frac{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}{\lambda} d\xi;$$

par conséquent, φ et Φ désignant deux potentiels réguliers dans (D), et s'annulant suffisamment vite pour $\xi \rightarrow \infty$, la formule de Green:

$$\int \left(\varphi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\varphi}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

où l'intégrale est prise sur toute la surface limitant le domaine, se réduit ici à :

(I, 13)

$$\int_0^{\infty} \left| \varphi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\varphi}{dn} \right|_{\zeta=0}^{\zeta=\frac{\pi}{p}} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} d\xi = 0.$$

En particulier, si φ et Φ sont des potentiels liés au fonctionnement aérodynamique de deux hélices pour la même valeur du paramètre λ , les conditions (I,10) donnent à la formule de Green l'expression simple :

(I, 14)

$$\int_0^1 \left(\varphi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\varphi}{dn} \right)_{\zeta=0} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} d\xi = 0,$$

dans laquelle on pourra faire intervenir les dérivées par rapport à ξ en tenant compte de l'égalité

(I, 15)

$$\left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_{\zeta=0} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}{\lambda} \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\zeta=0}.$$

1.1.11. — Remplaçons alors l'un des potentiels, Φ par exemple, par la fonction G_p ; la formule de Green s'applique encore au domaine (D) dont on a retranché un cylindre (C) de rayon r entourant l'hélice singulière M_0 ; G_p se comportant au voisinage de M_0 comme $\log r$, on a d'une part :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_C G_p \frac{d\varphi}{dn} d\sigma = 0,$$

et d'autre part :

$$\int_C \varphi \frac{dG_p}{dn} d\sigma \sim \varphi(\xi_0, \zeta_0) \cdot 2\pi \frac{\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}}{\lambda} \varepsilon,$$

d'où la formule :

(I, 16)

$$\varphi(\xi_0, \zeta_0) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}} \int_0^{\infty} \left| \varphi \frac{dG_p}{dn} \right|_{\zeta=0}^{\zeta=\frac{\pi}{p}} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} d\xi,$$

qui donne la solution du problème de Dirichlet pour le domaine (I,9). Lorsque les conditions (I,10) sont vérifiées, il vient

(I, 16')

$$\varphi(\xi_0, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi\lambda\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}} \int_0^1 \left(\varphi \frac{\partial G_p}{\partial \xi} \right)_{\zeta=0} (\lambda^2 + \xi^2) \frac{d\xi}{\xi};$$

On pourrait obtenir une formule assez analogue pour les problèmes de Neumann à l'aide de la fonction N_p .

1.1.12. Potentiel de l'échappement multipale. — Proposons-nous de déterminer un potentiel ψ par les conditions de Dirichlet suivantes :

(I, 17)

$$\psi = 0 \quad \begin{cases} \xi = 0, & \xi > \rho \\ \xi = \pi/p \end{cases}$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2} = c^{10}, \quad \xi = 0, \quad \xi < \rho.$$

La solution est donnée par (I,16) sous la forme

$$\psi(\xi_0, \zeta_0) = \frac{p\Gamma}{n\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} np \sin np\zeta_0 \left[K_{np} \left(\frac{np\xi_0}{\lambda} \right) \int_0^{\xi_0} I_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right) (\lambda^2 + \xi^2) \frac{d\xi}{\xi} \right. \\ \left. + I_{np} \left(\frac{np\xi_0}{\lambda} \right) \int_{\xi_0}^{\rho} K_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right) (\lambda^2 + \xi^2) \frac{d\xi}{\xi} \right],$$

qui suppose $\xi_0 < \rho$; dans le cas où $\xi_0 > \rho$, la première intégrale porte sur tout l'intervalle $(0, \rho)$ et la seconde disparaît. Les fonctions $I_{np}(t)$ et $K_{np}(t)$ étant solutions de l'équation:

$$y'' + \frac{y'}{t} - \left(1 + \frac{n^2 p^2}{t^2} \right) y = 0,$$

il suffit de poser:

$$t = \frac{np\xi}{\lambda}$$

pour avoir:

$$\frac{d\xi}{\xi} (\lambda^2 + \xi^2) \frac{K_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right)}{I_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right)} = \frac{\lambda^2}{n^2 p^2} \frac{d}{dt} \left[t \frac{I'_{np}(t)}{K'_{np}(t)} \right] dt,$$

d'où, en supprimant les indices zéro:

(I, 18)

$$\psi_i(\xi, \zeta) = \frac{p\Gamma}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{np} + \frac{\rho}{\lambda} K'_{np} \left(\frac{np\rho}{\lambda} \right) I_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right) \right] \sin np\zeta \quad \xi < \rho, \\ \psi_e(\xi, \zeta) = \frac{p\Gamma}{\pi\lambda} \rho \sum_{n=1}^{\infty} K_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right) I'_{np} \left(\frac{np\rho}{\lambda} \right) \sin np\zeta \quad \xi > \rho.$$

D'après les conditions (I,17) ψ est le potentiel d'un système tourbillonnaire ayant la symétrie hélicoïdale d'ordre p et ne présentant de tourbillons libres qu'au moyen $\xi = 0$ et au point $\xi = \rho$; c'est donc le potentiel d'un échappement élémentaire d'intensité Γ au point ρ de chacune des pales, auquel est adjoint un tourbillon moyen rectiligne d'intensité $-p\Gamma$. Pour retrouver, à l'aide de (I,18), les formules de Kawada relatives à cet échappement multipale (H.20), on utilisera le développement

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin np\xi}{np} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{p} - \xi \right),$$

valable dans l'intervalle $(0, 2\pi/p)$, d'où finalement:

(I, 18')

$$\psi_i = \frac{p\Gamma}{2\pi} \left(\frac{\pi}{p} - \xi \right) + \frac{p\Gamma}{\pi\lambda} \rho \sum_{n=1}^{\infty} K'_{np} \left(\frac{np\rho}{\lambda} \right) I_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda} \right) \sin np\zeta, \quad \xi < \rho$$

expression que nous utiliserons par la suite.

I. 2. ÉQUATION DU FONCTIONNEMENT AÉRODYNAMIQUE DE L'HÉLICE INFINIMENT-PEU CHARGÉE

1.2.1. Vitesses induites sur une pale. — Les tourbillons libres de l'hélice induisent des vitesses additionnelles que nous définirons par leurs composantes semi-polaires: composante radiale, composante tangentielle, composante axiale. Les composantes radiales provoquent la contraction de la veine. On néglige leurs effets en ce qui concerne la recherche des circulations le long d'une pale.

En une section de pale faite à la distance ξ de l'axe, les deux autres composantes ont les valeurs

$$u = \frac{1}{2\xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{\xi} = 0, \quad v = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{\xi} = 0,$$

φ étant le potentiel hélicoïdal correspondant au fonctionnement de l'hélice considérée au régime λ .

On a, d'après (I,7) :

$$(I, 19) \quad u\xi + \lambda v = 0,$$

qui exprime que la vitesse $\vec{w}$ (u, v), représentant la composante de la vitesse induite dans le plan perpendiculaire à la pale au point ξ , est normale au vecteur $\vec{W}$ (ξ, λ), représentant la vitesse relative initiale; $\vec{w}$ est donc normal à l'hélicoïde tourbillonnaire et on a

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\xi} = 0.$$

Si, en accord avec la convention faite plus haut (1.1.10), on prend pour sens positif de la normale le sens $\xi > 0$, on aura

$$\frac{u}{\lambda} = -\frac{v}{\xi} = \frac{w}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}.$$

1.2.2. Angle induit. — En composant $\vec{w}$ et $\vec{W}$, on obtient la vitesse relative résultante de la pale, $\vec{W}'$, qui diffère de $\vec{W}$, en direction, d'un angle induit δi égal à :

$$\delta i = \text{Arc tg} \frac{\lambda + v}{\xi + u} - \text{Arc tg} \frac{\lambda}{\xi} = \text{Arc tg} \frac{\xi(\lambda + v) - \lambda(\xi + u)}{\xi(\xi + u) + \lambda(\lambda + v)};$$

le champ de validité de la théorie ne s'étendant qu'à des régimes pour lesquels δi est petit, on a aussi :

$$(I, 20) \quad \delta i \sim \frac{v\xi - \lambda u}{\lambda^2 + \xi^2 + (u\xi + v\lambda)},$$

formule générale, qui se simplifie ici en tenant compte de (I,19) :

$$(I, 21) \quad \delta i = \frac{v\xi - \lambda u}{\lambda^2 + \xi^2} = \frac{v}{\xi} = -\frac{u}{\lambda} = -\frac{w}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}.$$

Enfin,

$$W' = \sqrt{(\xi + u)^2 + (\lambda + v)^2} = \sqrt{w^2 + W^2},$$

vitesse qui se réduit à W si nous faisons la même approximation que dans δi (c'est-à-dire en négligeant le deuxième ordre en u et v).

1.2.3. Equation du fonctionnement. — Admettons alors que, placé dans la vitesse W' , chaque profil prend même circulation que s'il était, en allongement infini, dans un écoulement uniforme de vitesse générale W' . Si nous désignons par k la demi-pente $1/2 \, dc_i/di$ de la caractéristique de portance, par t la corde du profil, on a (H.31) :

$$\Gamma(\xi) = ktW'i',$$

où i' désigne l'incidence effective du profil. Nous repérons par $\alpha(\xi)$ le calage du premier axe de ce profil sur le plan de rotation xOy et par β l'inclinaison de W sur ce même plan :

$$\beta = \text{Arc tg } \frac{\lambda}{\xi};$$

dans ces conditions, on traduira la relation précédente par :

$$(I, 22) \quad \Gamma(\xi) = kt \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} (\alpha - \beta - \delta i),$$

où k , t , α , β sont des données et où δi est relié aux vitesses induites, c'est-à-dire à Γ , par (I,21) ; $\alpha - \beta$ est l'incidence géométrique du profil, soit $i(\xi)$.

Le potentiel φ des tourbillons libres satisfait dans (I,9) aux conditions (I,10) et prend pour $\xi = +\infty$, $\xi < 1$ les valeurs $(1/2) \Gamma(\xi)$, ce qui permet d'écrire aussi (I,22) sous la forme :

$$(I, 23) \quad \varphi(\xi, \infty) = \frac{kt}{2} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \left[i(\xi) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_{\xi=\infty} = 0 \right].$$

Le problème de la recherche des circulations en envergure est donc équivalent à celui de la détermination du potentiel φ par les conditions aux limites (I,10) d'une part, et d'autre part par la condition (I,23) qui est une relation linéaire entre φ et sa dérivée normale sur la coupure analogue à celles de la théorie de la chaleur : $A\varphi - B d\varphi/dn + C = 0$; on a ainsi un problème mixte pour φ . Les coefficients A , B , C , fonctions de ξ , dépendent de la forme en plan de la pale et de la nature des profils par le produit kt , du gauchissement géométrique par $i(\xi)$ et des conditions de fonctionnement par le paramètre λ .

1.2.4. Relations de réciprocité (1). — Considérons pour une même valeur de λ deux hélices de même nombre de pales, caractérisées respectivement par les variables k , t , i et K , T , I , fonctions données de ξ ; les potentiels φ et Φ liés aux échappements tourbillonnaires correspondants vérifient la relation (I,14), de laquelle nous pouvons éliminer les dérivées normales au moyen des deux relations (I,23) exprimant le fonctionnement aérodynamique des deux hélices; on a ainsi :

$$(I, 24) \quad \int_0^1 (i\Phi - I\varphi) (\lambda^2 + \xi^2) d\xi = 2 \int_0^1 \left[\frac{1}{kt} - \frac{1}{KT} \right] \varphi \Phi \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} d\xi,$$

relation de réciprocité qui devient, lorsque les pales des deux hélices ont même forme en plan et mêmes profils ($kt = KT$) :

$$(I, 25) \quad \int_0^1 (i\Phi - I\varphi) (\lambda^2 + \xi^2) d\xi = 0.$$

1.2.5. Considérons une loi de gauchissement i_1 nulle sur toute l'envergure, sauf au voisinage immédiat d'un point ξ_1 , où l'on a $i_1 = 1$ et soit $\varphi_1(\xi)$ le potentiel correspondant; considérons de même

une loi de gauchissement i , égale à 1 au voisinage de ξ_2 , nulle sur le restant de la pale, et donnant lieu à une répartition $\varphi_2(\xi)$. Appliquée aux deux groupes i_1, φ_1 et i_2, φ_2 , la relation (I,25) donne:

$$\int_{\xi_1 - \varepsilon}^{\xi_1 + \varepsilon} (\lambda^2 + \xi^2) \varphi_2(\xi) d\xi = \int_{\xi_2 - \varepsilon'}^{\xi_2 + \varepsilon'} (\lambda^2 + \xi^2) \varphi_1(\xi) d\xi,$$

2ε et $2\varepsilon'$ représentant les intervalles où respectivement i_1 et i_2 ne sont pas nuls; en supposant ces intervalles suffisamment petits et égaux, on a:

$$(I, 26) \quad (\lambda^2 + \xi_1^2) \varphi_2(\xi_1) = (\lambda^2 + \xi_2^2) \varphi_1(\xi_2).$$

La circulation « induite » en un point ξ_1 , par un effet de gauchissement élémentaire placé en un point ξ_2 , affectée du poids $\lambda^2 + \xi_2^2$, se retrouve donc dans la circulation, affectée du poids $\lambda^2 + \xi_1^2$, induite en ξ_2 par l'effet élémentaire situé en ξ_1 . On généralise ainsi les propriétés connues des effets de gauchissement de la théorie de l'aile (1).

1.2.6. Cas du changement de pas. — La relation (I,25), relative aux distributions tourbillonnaires issues de pales de même forme en plan, ayant des lois de gauchissement respectives i et I , est valable en particulier lorsque ces deux lois se déduisent l'une de l'autre par changement de pas, c'est-à-dire par rotation de chaque pale autour de son axe d'un même angle ε :

$$I(\xi) = i(\xi) + \varepsilon,$$

i représentant alors une distribution de gauchissement de base. Désignons par $\varphi''(\xi)$ le potentiel hélicoïdal correspondant à une incidence géométrique i égale à l'unité d'angle sur toute l'envergure: il est clair que, étant donné le caractère linéaire de la relation (I,23), on a:

$$(I, 27) \quad \Phi = \varphi + \varepsilon \varphi'';$$

le changement de pas joue dans la théorie de l'hélice le même rôle que le changement d'incidence dans la théorie de Prandtl et la distribution générale de potentiel Φ (ou de circulation) est la somme d'une distribution de base φ et d'une distribution additionnelle proportionnelle à la rotation des pales et à la fonction φ'' que nous appellerons *effet de changement de pas*. On a d'ailleurs d'après (I,25):

$$(I, 28) \quad \int_0^1 (\lambda^2 + \xi^2) \varphi(\xi) d\xi = \int_0^1 (\lambda^2 + \xi^2) \varphi''(\xi) i(\xi) d\xi,$$

relation très analogue à celle qui existe dans la théorie de l'aile (2) mais qui n'est pas à même de nous rendre ici les mêmes services, étant donné que les intégrales telles que celles du premier membre n'interviennent pas d'une manière directe dans l'évaluation des caractéristiques globales du propulseur.

1.2.7. Relations de symétrie. — Désignons par $2\pi \sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2} f(M, M_0)$ une fonction présentant une singularité logarithmique de même nature que celle de F (1.1.9) le long de $M_0(\xi_0, \zeta_0)$, et définie par les conditions (I,10), auxquelles on adjoint sur la coupure $\xi=0, \xi<1$ la relation:

$$\frac{df}{dn} = 0.$$

En appliquant à un potentiel hélicoïdal φ quelconque, régulier dans (I,9), la formule (I,14) dans laquelle on remplace Φ par $2\pi \sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2} f$, on obtient:

$$(I, 29) \quad \varphi(\xi_0, \zeta_0) = \int_0^1 \left(f \frac{d\varphi}{dn} \right)_{\xi=0} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} d\xi,$$

(1) Cf. L. MALAVARD, Comptes rendus, 214, 1942, p. 105. J. PÉRÈS et L. MALAVARD, Tables; Rapport Technique G.R.A. N° 9.

(2) Cf. MALAVARD, loc. cit.

qui donne φ partout quand on se donne les valeurs $d\varphi/dn$ sur la coupure; f joue donc pour les potentiels hélicoïdaux le rôle de fonction de Green dans le cas des problèmes mixtes avec condition de Neumann sur la coupure. La formation de f n'est pas simple et nous n'insisterons pas sur sa détermination analytique, qui importe peu pour la suite. On verra, au chapitre suivant, que l'existence de f , ainsi que celle de G et de N devient intuitive si l'on passe à l'analogie rhéoelectrique et que l'on peut en déduire la détermination de ces fonctions. Nous établirons ici seulement une *propriété de symétrie* de f par rapport aux rayons vecteurs ξ et ξ_0 .

En effet, désignons par $\varphi(\xi_0)$ la valeur prise par φ sur la coupure $\xi_0 = 0$, $\xi_0 < 1$, et par $f(\xi, \xi_0)$ ce que devient la fonction f quand $\xi = \xi_0 = 0$; on a la représentation intégrale:

$$(I, 30) \quad \varphi(\xi_0) = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_{\xi=0} f(\xi, \xi_0) \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} d\xi,$$

dont la convergence n'est pas altérée par la singularité logarithmique de f dans l'intervalle d'intégration. Il suffit alors de substituer cette expression de φ , ainsi que celle qu'on en déduit pour un autre potentiel Φ en fonction de $d\Phi/dn$, dans la relation générale (I,14) pour s'assurer que cette dernière ne peut être vérifiée quelles que soient $d\varphi/dn$ et $d\Phi/dn$ que si l'on a bien:

$$f(\xi, \xi_0) = f(\xi_0, \xi),$$

propriété de symétrie que possédait également le noyau $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \xi_0^2}} (\partial G_p / \partial \xi)_{\xi=0}$ de la représentation (I,16).

1.2.8. La relation précédente (I,30) est très générale et s'applique à tous les potentiels satisfaisant aux conditions (I,10); les potentiels qui en plus satisfont sur la coupure à une condition du type (I,23) représentant l'équation du fonctionnement aérodynamique de l'hélice sont susceptibles d'autres représentations du même type, dont le noyau fait intervenir cette fois les caractéristiques aérodynamiques de l'hélice; portons, par exemple, dans (I,23) la valeur (I,30) de φ ; on a, en désignant $d\varphi/dn$ par φ'_n :

$$(I, 31) \quad \varphi(\xi) = \int_0^1 f(\xi, x) \varphi'_n(x) \sqrt{\lambda^2 + x^2} dx = \frac{kt}{2} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} i(\xi) + \frac{kt}{4} \varphi'_n(\xi),$$

équation de Fredholm par rapport à φ'_n , dont l'intégration est équivalente au problème de détermination de φ par les conditions (I,10) et (I,23); cette équation est l'analogue de celle proposée dans la théorie de l'aile par Gebelein (1) pour remplacer l'équation à valeur principale de Prandtl; il est clair que la détermination des fonctions propres de l'équation (I,31) relatives à une forme en plan donnée permet d'obtenir immédiatement les répartitions de circulation correspondant à une loi quelconque de gauchissement.

Posons, dans (I,31):

$$\sqrt{kt(\xi)} \varphi'_n(\xi) = y(\xi);$$

y est déterminé par l'équation:

$$(I, 32) \quad y(\xi) + 2\sqrt{(\lambda^2 + \xi^2) kt(\xi)} i(\xi) = 4 \int_0^1 f(\xi, x) \frac{y(x)}{\sqrt{kt(\xi) kt(x)}} \sqrt{\lambda^2 + x^2} dx,$$

(1) GEBELEIN, Ingénieur Archt., 7, 1936, p. 297. — Cf. également: N. FLORINE: Sur quelques problèmes de la théorie tourbillonnaire de l'hélice propulsive et de l'aile d'avion (Bulletin n° 19 du Service technique de l'Aéronautique Belge, août 1944).

dont le noyau peut se mettre sous forme du produit d'une fonction symétrique en x et ξ par

$$4\sqrt{(\lambda^2 + x^2)/(\lambda^2 + \xi^2)};$$

on aura donc:

$$y(\xi) + 2\sqrt{(\lambda^2 + \xi^2)kt(\xi)}i(\xi) = \int_0^1 U(x, \xi) 4\sqrt{\frac{\lambda^2 + x^2}{\lambda^2 + \xi^2}} \sqrt{(\lambda^2 + x^2)kt(x)}i(x)dx,$$

la résolvante $U(x, \xi)$ étant elle-même symétrique par rapport à x et ξ . Multiplions les deux membres de la dernière relation par $\sqrt{kt(\xi)}/4$, de façon à faire apparaître $\varphi(\xi)$ au premier membre, on voit qu'on a:

$$\varphi(\xi) = \int_0^1 g(\xi, x)(\lambda^2 + x^2)i(x)dx,$$

$g(\xi, x)$ étant une fonction symétrique en x et ξ , qui ne dépend que de la forme en plan des pales.

1.2.9. Tous les noyaux tels que g correspondant aux diverses lois de kt se déduisent de f par la résolution d'une équation telle que (I,32); on vérifie aisément (1) par ailleurs que l'on passe de g au noyau $G(x, \xi)$ de la représentation intégrale:

$$\Phi(\xi) = \int_0^1 (\lambda^2 + x^2)G(x, \xi)I(x)dx$$

relative à la pale de caractéristiques K, T, I , par l'équation de Fredholm:

$$G(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) + \int_0^1 \left[\frac{1}{kt(s)} - \frac{1}{KT(s)} \right] (\lambda^2 + \xi^2)(\lambda^2 + \eta^2) \sqrt{\lambda^2 + s^2} G(\xi, s)g(s, \eta)ds.$$

I. 3. HÉLICES OPTIMA INFINIMENT PEU CHARGÉES

1.3.1. Caractéristiques globales de fonctionnement de l'hélice. — La connaissance de la répartition $\Gamma(\xi) = 2\varphi(\xi, 0)$ en envergure suffit pour l'évaluation des efforts sur chaque profil, et par conséquent, sur toute la pale. Désignons par c_x le coefficient de résistance, en allongement infini, d'un profil dont le coefficient de portance est:

$$c_x = \frac{2\Gamma}{t\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}};$$

L'application à chaque profil du théorème de Joukowsky conduit, lorsqu'on fait la somme des projections sur Oz et des moments par rapport à cet axe des forces élémentaires agissant le long de l'envergure, aux expressions suivantes de la traction C_T et du couple C_Q (2):

$$(I, 33) \quad \begin{aligned} C_T &= 2p \int_0^1 (\xi + u) \Gamma d\xi - p\lambda \int_0^1 c_x t \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} d\xi, \\ C_Q &= 2p \int_0^1 (\lambda + v) \Gamma \xi d\xi + p \int_0^1 c_x t \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \xi^2 d\xi, \end{aligned}$$

(1) Cf. J. PÉRÈS, Comptes Rendus, 218, 1944, p. 629.

(2) Les tractions sont rapportées à $\rho \omega^2 R^4/2$ (ρ , masse spécifique de fluide), les couples à $\rho \omega^2 R^5/2$, les puissances et énergies à $\rho \omega^3 R^5/2$.

traduisant une perte d'énergie:

$$C_E = C_Q - \lambda C_T = 2p \int (v\xi - \lambda u) \Gamma d\xi + p \int c_x t (\lambda^2 + \xi^2)^{3/2} d\xi,$$

dont la première partie C_E^i est imputable aux vitesses induites:

$$(I, 34) \quad C_E^i = 2p \int (v\xi - \lambda u) \Gamma d\xi = 2p \int \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} w \Gamma d\xi$$

et le second terme C_E^p est dû aux traînées de profil:

$$(I, 35) \quad C_E^p = p \int c_x t (\lambda^2 + \xi^2)^{3/2} d\xi.$$

Le rendement correspondant à la transformation du couple moteur en traction est:

$$\eta = \lambda \frac{C_T}{C_Q}.$$

1.3.2. Fonctionnement à pas variable. — Dans chacune des formules globales (I,33), on obtient la caractéristique considérée comme somme de trois termes; le premier

$$C_Q^o = 2p \lambda \int \Gamma \xi d\xi = \lambda C_T^o$$

est le principal; les termes induits:

$$C_T^i = 2p \int u \Gamma d\xi, \quad C_Q^i = 2p \int v \Gamma \xi d\xi$$

évalués ici au deuxième ordre par rapport à u et v , sont en général plus importants que les termes de traînée de profil C_T^p et C_Q^p . Si nous désignons par $\Gamma_0(\xi)$ la quantité:

$$\Gamma_0(\xi) = kt \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} i(\xi),$$

on a d'après (I,22):

$$v = \xi \frac{\Gamma_0 - \Gamma}{kt \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}, \quad u = -\frac{\lambda}{\xi} v,$$

d'où

$$C_T^i = -2p\lambda \int \frac{\Gamma(\Gamma_0 - \Gamma)}{kt \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} d\xi, \quad C_Q^i = 2p \int \frac{\Gamma(\Gamma_0 - \Gamma)}{kt \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} \xi^2 d\xi.$$

Considérons alors le cas où Γ est la répartition d'une hélice à pas variable caractérisée par la rotation des pales ε (n° 1.2.6.):

$$\Gamma = \gamma + \varepsilon \gamma^{(p)};$$

on obtient aisément, en désignant par C_T' la somme des deux premiers termes $C_T^o + C_T^i$:

$$(I, 36) \quad C_T'(\Gamma) = C_T'(\gamma) + \varepsilon \left[C_T'(\gamma^{(p)}) - 2p\lambda \int \frac{\gamma^{(p)} [\gamma^{(p)} - 2\gamma]}{kt \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} d\xi \right] + 2p\lambda \varepsilon^2 \int \frac{[\gamma^{(p)}]^2}{kt \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} d\xi,$$

et une expression analogue pour C_Q ; comme la polaire induite d'une aile en fonction de l'incidence, les caractéristiques induites de l'hélice sont paraboliques en fonction du calage de la pale; il en est de même des caractéristiques globales dans la mesure où les termes en c_x peuvent être considérés comme constants quand ε varie, et où cette variation de ε ne s'étend que sur un intervalle restreint autour de la position de traction nulle.

1.3.3. Condition générale d'optimum. — Nous dirons que la répartition $\Gamma(\xi)$ est optimum (H. 54) si la perte C_E est minimum, pour une valeur donnée de l'intégrale (1)

$$C_T = 2p \int \Gamma \xi d\xi.$$

Considérons une répartition voisine $\Gamma + \delta \Gamma(\xi)$; il lui correspond d'une part une variation δC_E^i provenant de:

$$\delta C_E^i = 2p \int \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} (w \delta \Gamma + \Gamma \delta w) d\xi,$$

et qui, étant donné la symétrie du noyau f (I,30), se réduit à:

$$\delta C_E^i = 4p \int \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} w \delta \Gamma d\xi,$$

et d'autre part

$$\delta C_E^p = p \int (\lambda^2 + \xi^2) \delta (c_s l) d\xi.$$

Bornons-nous à supposer que ces circulations variées sont obtenues avec les mêmes cordes, mais avec des gauchissements variés dont on cherche la répartition optimum (2); on a:

$$\delta (c_s l) = l \frac{dc_s}{dc_z} \cdot \frac{\partial c_z}{\partial \Gamma} \delta \Gamma,$$

avec

$$\frac{\partial c_z}{\partial \Gamma} = \frac{2}{l \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}};$$

d'où

$$\delta C_E^p = 2p \int (\lambda^2 + \xi^2) \frac{dc_s}{dc_z} \delta \Gamma d\xi.$$

Comme

$$\delta C_T = 2p \int \xi \delta \Gamma d\xi,$$

la condition d'optimum s'écrit:

$$4p \int \left[\sqrt{\lambda^2 + \xi^2} w + (\lambda^2 + \xi^2) \frac{1}{2} \frac{dc_s}{dc_z} - \theta \xi \right] \delta \Gamma d\xi = 0,$$

(1) En fait, le problème de l'adaptation optimum impose un minimum de C_E pour une valeur donnée du coefficient global C_0 , et non pas seulement de C_T ; mais nous avons montré (H.54) que l'on ne savait pas évaluer simplement les variations des termes autres que C_T sans faire usage d'une représentation explicite (nécessairement approchée) des vitesses induites en fonction des circulations. Nous restons ici dans les généralités, gardant pour un autre travail la discussion générale d'optimum.

(2) Dans le cas général où on considère que la recherche porte simultanément sur les cordes et les gauchissements de la pale, il convient de conduire le calcul en tenant compte des variations de ces deux fonctions; on est alors conduit à d'autres conditions que (I,37).

Cf. par exemple les travaux suivants, dans le cadre de la théorie simplifiée de Lock:

LOCK, PANKHURST & FOWLER: Determination of the Optimum Twist of an Aircscrew Blade by the Calculus of Variations, A.R.C., R.M. 2088.

HAINES & DIPROSE: The Application of the Calculus of Variations to Propeller Design with particular Reference to Spitfire VII with Merlin 61 Engine, A.R.C., R.M. 2083.

(θ étant une constante arbitraire) et ne peut être vérifiée quel que soit $\delta\Gamma$ que si:

$$(I, 37) \quad \frac{w}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} + \frac{1}{2} \frac{dc_z}{d\xi} = \theta \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2}.$$

La somme de l'angle induit et de la demi-pente de la polaire $c_z(c_z)$ doit donc être proportionnelle à $\xi/(\lambda^2 + \xi^2)$ (1).

1.3.4. On ne peut pas donner de solution générale de l'équation (I,37) concernant, par exemple, la circulation, car le terme contenant c_z dépend du c_z auquel travaille chaque profil, qui fait intervenir lui-même à la fois Γ et t : les répartitions de circulation satisfaisant à (I,37) dépendent de la loi de corde utilisée.

Admettons que les polaires de profil des différentes sections puissent être représentées par la famille de paraboles:

$$c_z = c_z^0(\xi) + A(\xi)[c_z - c_z^0(\xi)]^2;$$

on a

$$\frac{1}{2} \frac{dc_z}{d\xi} = A(c_z - c_z^0) = \frac{2A\Gamma(\xi)}{t\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} - A c_z^0,$$

et la condition (I,37) s'écrit:

$$\frac{w}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} + \frac{2A\Gamma}{t\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} = \theta \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2} + A c_z^0,$$

ou, sous une forme analogue à l'équation du fonctionnement:

$$(I, 37') \quad \varphi = \frac{t}{4A} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \left[A c_z^0 + \theta \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} \frac{d\varphi}{dn} \right].$$

Considérons alors une pale fictive ayant même loi de cordes que la pale donnée, mais des profils dont les demi-pentes caractéristiques sont

$$k' = \frac{1}{2A};$$

soient φ' et φ'' les répartitions de potentiel de cette pale fictive, gauchie suivant des lois respectivement égales à $A c_z^0(\xi)$, puis $\xi/(\lambda^2 + \xi^2)$; il est clair que:

$$\varphi = \varphi' + \theta \varphi'',$$

et la répartition sera entièrement connue quand θ aura été déterminé (par exemple par la condition qu'une des caractéristiques globales ait une valeur donnée); on aura ensuite la loi de gauchissement $i(\xi)$ à adopter pour la pale réelle en écrivant qu'on a aussi (I,23):

$$\varphi = \frac{k t}{2} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \left[i(\xi) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} \frac{d\varphi}{dn} \right],$$

(1) Cf. REISSNER: The wing of minimum total résistance, *Journ. Aeron. Sc.* 7, 1940, p. 114. La relation (I,37) est indiquée à la fin du mémoire, comme généralisation des résultats acquis pour l'aile portante, sous la forme

$$\delta i + \mu_{/2} = \theta \xi / (\lambda^2 + \xi^2),$$

$\mu = c_z/c_z$ étant un angle de trainée parasite supposé connu dans chaque section; la méthode décrite ici est très différente, et permet d'envisager une relation quelconque $c_z(c_z)$; elle contient le résultat de Reissner, dans le cas particulier où cette relation est de la forme

$$c_z = \mu c_z^0,$$

μ étant supposé indépendant de c_z .

et en éliminant $d\varphi/dn$ entre cette relation et (I,38) (1).

1.3.5. Optimum tourbillonnaire. — On ne considère en général que la première partie de la condition (I,37) relative à l'*optimum tourbillonnaire seul*. On obtient alors la condition:

$$(1, 38) \quad \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_{\xi=0} = -2\theta \frac{\xi}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}, \quad \left(v = \theta \frac{\xi^2}{\lambda^2 + \xi^2}, \quad u = -\frac{\lambda}{\xi} v \right)$$

qui, jointe aux relations générales (I,10), détermine φ ; le calcul a été effectué pour la première fois par Goldstein (H. 61).

1.3.6. Adaptation. — Soit Γ la répartition de circulation, solution de (I,38) pour une valeur quelconque de la constante θ ; nous posons:

$$(I, 39) \quad \Gamma = \frac{4\pi\lambda}{p} \theta \Gamma^*(\xi, \lambda; p).$$

Pour une hélice optimum, les formules (I,33) où l'on néglige les termes en c_x deviennent:

$$(I, 40) \quad \begin{aligned} C'_T &= 8\pi\lambda\theta \int \Gamma^* \xi d\xi - 8\pi\lambda^2 \theta^2 \int \frac{\Gamma^* \xi d\xi}{\lambda^2 + \xi^2} = \theta I(\lambda) - \theta^2 K(\lambda), \\ C'_Q &= 8\pi\lambda^2 \theta \int \Gamma^* \xi d\xi + 8\pi\lambda\theta^2 \int \frac{\Gamma^* \xi^2 d\xi}{\lambda^2 + \xi^2} = \theta J(\lambda) + \theta^2 L(\lambda); \end{aligned}$$

C'_T et C'_Q ont donc, pour une valeur donnée de λ , une représentation parabolique en fonction de θ ; la donnée de λ et de C'_Q (données d'adaptation) (2) conduit, pour la deuxième équation (I,40) à une valeur positive unique de θ , dite *constante d'adaptation*, dont la connaissance entraîne celle de la répartition de circulation (I,39) et de la loi d'angles induits (I,38) que créera cette circulation. Pour qu'une hélice soit optimum, au sens de la définition du n° 1.3.5., tout en absorbant la puissance C'_Q au régime d'adaptation λ , il suffit alors que ses cordes et ses gauchissements soient liés par la relation:

$$(I, 41) \quad \frac{4\pi\lambda}{p} \theta \Gamma^* = kt \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \left[i(\xi) - \theta \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2} \right],$$

moyennant les restrictions nécessaires à la validité de la théorie et à la possibilité de réalisation de la pale.

1.3.7. Solution particulière. — On voit sur (I,40) que, si pour une valeur $\lambda = \lambda_0$, la valeur $\theta = 0$ de la constante d'adaptation est atteinte, c'est que

$$C'_T = C'_Q = 0,$$

et il vient d'après (I,41)

$$i(\xi) = \alpha - \text{Arc tg } \frac{\lambda_0}{\xi} = 0;$$

d'où: *Les hélices optima à leur régime de couple induit nul (ou de traction induite nulle) ont nécessairement un pas aérodynamique constant:*

$$\text{tg } \alpha(\xi) = \frac{\lambda_0}{\xi},$$

quelle que soit l'évolution des cordes.

1.3.8. Celles-ci peuvent être déterminées simplement par la condition que l'optimum subsiste au régime voisin $\lambda = \lambda_0 + d\lambda$. En effet, posons (3),

$$\Gamma = \frac{4\pi\lambda}{p} \theta \Gamma^* = \theta \frac{\gamma(\xi)}{\cos \beta}, \quad \left(\text{tg } \beta = \frac{\lambda}{\xi} \right)$$

(1) R. SIESTRUNCK: sur les répartitions de portance assurant le minimum de résistance totale d'une aile; 1^{er} Congrès de l'Aviation Française, Rapport n° 335.

(2) En fait, la donnée pratique est le coefficient global C'_Q , et pour passer à C'_Q , il faut évaluer les termes de traînée de profil, dans lesquels on remplacera initialement le produit c_t par une valeur approchée.

(3) R. SIESTRUNCK, Comptes rendus, 219, 1944, p. 252.

ce qui permet d'écrire (I,41) sous la forme:

$$(I, 41') \quad \theta \gamma = kt \xi \left(\alpha - \beta - \theta \frac{\cos^2 \beta}{\xi} \right).$$

Cette relation est vérifiée quel que soit ξ pour $\theta = 0$ correspondant à $\lambda = \lambda_0$, et il doit en être de même pour la valeur $\theta = d\theta$ correspondant à $\lambda = \lambda_0 + d\lambda$; on en déduit par différentiation le quotient:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = - \frac{kt \cos^2 \alpha}{\gamma + kt \cos^2 \alpha},$$

qui doit être indépendant de ξ ; en désignant par Θ la constante $d\theta/(d\theta - d\lambda)$, on a finalement (H. 71):

$$(I, 42) \quad kt = \Theta \frac{\gamma}{\cos^2 \beta} = \frac{4\pi\lambda}{p} \Theta \frac{\Gamma^* \sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{4}}}{\xi}.$$

La forme en plan est entièrement déterminée par le choix de Θ , ou, ce qui revient au même, de $(\partial C'_{Q1}/\partial \lambda)_{\lambda_0}$ ou $(\partial C'_{T1}/\partial \lambda)_{\lambda_0}$ puisqu'on a d'après (I,40):

$$\left(\frac{\partial C'_{Q1}}{\partial \lambda} \right)_{\lambda_0} = 8\pi \lambda_0^2 \frac{d\Theta}{d\lambda} \int \Gamma^*(\xi, \lambda_0; p) \xi d\xi = \lambda_0 \left(\frac{\partial C'_{T1}}{\partial \lambda} \right)_{\lambda_0}.$$

1.3.9. La propriété précédente peut être étendue à un intervalle fini de variation de λ : deux couples (λ_1, C'_{Q1}) , (λ_2, C'_{Q2}) de données d'adaptation déterminent en effet les profondeurs et les gauchissements d'une manière unique puisque les équations telles que (I,41) écrites pour chacun des deux régimes proposés constituent un système linéaire en $\alpha(\xi)$ et $1/kt$. Les difficultés d'utilisation pratique des solutions obtenues augmentent lorsque l'intervalle $|\lambda_1 - \lambda_2|$ des fonctionnements d'adaptation augmente, et, pour une valeur donnée de cet intervalle, lorsque la différence $|C'_{Q1} - C'_{Q2}|$ des coefficients de puissance diminue; nous avons montré (1) comment on pouvait aboutir, dans certaines conditions, à des résultats utilisables. Toutefois, il ressort des cas pratiques que nous avons eu l'occasion de traiter qu'on ne peut considérer des doubles adaptations correspondant à un fort écart de vitesse de l'avion qu'en abandonnant, à un des deux régimes, la répartition de circulation optimum pour une répartition qui conduise, plus aisément, à des lois de cordes compatibles avec les conditions de résistance de la pale.

I. 4. L'HÉLICE MOYENNEMENT CHARGÉE; PAS RÉEL DES TOURBILLONS

1.4.1. La théorie tourbillonnaire est encore valable à des régimes de fonctionnement (décollage, vitesse maximum) où l'hélice est assez fortement chargée du point de vue aérodynamique, sans toutefois que les sillages de profil aient une contribution prépondérante dans les pertes d'énergie; nous appellerons hélice *moyennement chargée* une hélice fonctionnant à un régime tel que chaque profil travaille encore dans la partie linéaire de la courbe $c_x^\infty(i)$. On constate que, dans ces conditions, les pertes d'énergie induites peuvent être, aux faibles valeurs de λ , considérables, et qu'il y a lieu de modifier quelque peu la théorie tourbillonnaire de l'hélice infiniment peu chargée; pour cela, le procédé le plus simple consiste à tenir compte des autodéformations des surfaces de discontinuité dans le sillage par une *variation de pas* de ces surfaces, auxquelles on convient d'attribuer toujours la forme géométrique d'hélicoïdes.

Remarque. — Il est clair que la permanence de forme du sillage est une hypothèse d'autant plus difficilement acceptable que l'hélice est plus chargée, du fait de la contraction de la veine due aux vitesses radiales négligées, de la rapide désagrégation des surfaces tourbillonnaires sous l'action de leurs propres vitesses induites, et de la variation même de ces vitesses induites quand on s'éloigne

(1) Cf. référence au n° 1.3.8.

dans le sillage, variation qui modifie d'une façon continue le pas des lignes de courant relatives en aval de l'hélice.

1.4.2. Supposons donc qu'on puisse attribuer pour support au système tourbillonnaire libre les portions d'hélicoïdes

$$\zeta^* = \theta - z/\lambda^* = \frac{2K\pi}{p}, \quad \xi < 1,$$

de pas réduit λ^* , différent du fonctionnement λ . Les propriétés du potentiel φ des vitesses induites obtenues dans la première partie de ce chapitre subsistent à condition de remplacer λ par λ^* ; en particulier, φ ne dépend que de ξ et ζ^* , et les vitesses induites u et v au point de rayon ξ de la pale sont liées par la relation

$$(I, 43) \quad u\xi + \lambda^* v = 0,$$

qui exprime que la vitesse w résultant de u et v est normale à la surface tourbillonnaire:

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dn} \right) \zeta^* = 0.$$

D'autre part, on sait que les lignes de tourbillons coïncident avec les lignes de courant de l'écoulement relatif (H.5); la ligne de courant qui rencontre la pale au rayon ξ est tangente à la vitesse W' de composante $\xi + u$, $\lambda + v$ sur yOz ; il doit en être de même de la ligne de tourbillon qui s'échappe du même point, ce qui s'écrit:

$$\frac{\lambda + v}{\xi + u} = \frac{\lambda^*}{\xi},$$

ou:

$$(I, 44) \quad v\xi - \lambda^* u = \xi(\lambda^* - \lambda).$$

Les deux relations (I,43-I,44), vérifiées simultanément par u et v donnent:

$$(I, 45) \quad v = \frac{(\lambda^* - \lambda)\xi^2}{\lambda^{*2} + \xi^2}, \quad u = -\frac{\lambda^*}{\xi} v, \quad w = (\lambda^* - \lambda) \frac{\xi}{\sqrt{\lambda^{*2} + \xi^2}},$$

ce qui montre que les filets tourbillonnaires ne peuvent garder un pas constant en envergure que si les vitesses induites sont de la forme (I,45).

1.4.3. Hélices optima généralisées. — On peut interpréter cinématiquement les relations (I,45) comme cela se fait d'ordinaire pour les conditions (I,38) d'optimum (H.55): les vitesses induites (I,45) sont identiques aux vitesses de contact d'un fluide quelconque, au repos à l'infini, avec les hélicoïdes tourbillonnaires solidifiés et animés d'une translation uniforme parallèle à leur axe ou d'une rotation uniforme autour de cet axe. Par analogie, nous appellerons donc *hélices optima généralisées* les hélices qui, au fonctionnement λ , présentent une répartition de vitesses induites (I,45), λ^* étant quelconque; il est clair que la répartition de circulation de telles hélices est

$$(I, 47) \quad \Gamma = \frac{4\pi\lambda^*}{p} (\lambda^* - \lambda) \Gamma^*(\xi, \lambda^*; p),$$

Γ^* désignant toujours la solution de Goldstein (n° 1.3.5.). Enfin, nous poserons dans la suite

$$\theta = \lambda^* - \lambda.$$

1.4.4. Exprimons, avec ces notations, les caractéristiques induites globales des hélices optima généralisées comme nous l'avons fait au n° 1.3.6. pour les hélices infiniment peu chargées; on obtient, avec les mêmes notations:

$$(I, 48) \quad \begin{aligned} C_T &= 8\pi\lambda^*\theta \int \Gamma^*\xi d\xi - 8\pi\lambda^{*2}\theta^2 \int \frac{\Gamma^*\xi d\xi}{\lambda^{*2} + \xi^2} = \theta I(\lambda^*) - \theta^2 K(\lambda^*) \\ C_Q &= 8\pi\lambda\lambda^*\theta \int \Gamma^*\xi d\xi + 8\pi\lambda^*\theta^2 \int \frac{\Gamma^*\xi^2 d\xi}{\lambda^{*2} + \xi^2} = \theta \frac{\lambda}{\lambda^*} J(\lambda^*) + \theta^2 L(\lambda^*). \end{aligned}$$

La dernière relation s'écrit:

$$C'_0 + \theta^2 I(\lambda^*) = \theta J(\lambda^*) + \theta^2 L(\lambda^*).$$

Si nous désignons alors par $\Theta(C'_0; \lambda)$ la solution de l'équation d'adaption (I,40)

$$(I, 40) \quad C'_0 = \theta J(\lambda) + \theta^2 L(\lambda),$$

on voit que l'on a ici

$$(I, 49) \quad \theta = \lambda^* - \lambda = \Theta[C'_0 + \theta^2 I(\lambda^*); \lambda^*].$$

Cette forme d'équation se prête bien au calcul de λ^* à partir de C'_0 et λ par approximations successives, lorsqu'on dispose d'abaques de la fonction Θ ; il suffit de déterminer la valeur approchée initiale

$$\theta_0 = \lambda^*_0 - \lambda = \Theta(C'_0; \lambda),$$

et de former la suite des nombres:

$$\theta_n = \lambda_n^* - \lambda = \Theta[C'_0 + \theta_{n-1}^2 I(\lambda_{n-1}^*); \lambda_{n-1}^*],$$

qui converge vers θ . Le réseau des paraboles $C'_0(\lambda, \theta)$ (I,40) correspondant à des valeurs suffisamment rapprochées de λ (1) donne une détermination de λ^* très rapide. Par suite: *Le pas réel λ^* des tourbillons libres d'une hélice optimum généralisée est déterminé quand on s'impose une des caractéristiques induites globales (adaptation), et sa différence avec le paramètre de fonctionnement λ est égal à la constante d'adaptation θ .*

1.4.5. Application au problème général du fonctionnement. — Il résulte de la propriété obtenue au n° 1.4.2. que dans le cas général du fonctionnement d'une hélice quelconque moyennement chargée, les surfaces de discontinuité n'ont pas un pas constant en envergure; les mesures de λ^* par les méthodes de visualisation en témoignent également. Mais le développement de la théorie n'est praticable d'une façon simple que si la symétrie hélicoïdale du potentiel des vitesses subsiste; c'est pourquoi il convient de ne pas s'attacher à tenir compte d'effets qui sont pratiquement du second ordre, et d'admettre que, quelle que soit l'hélice, *les surfaces tourbillonnaires restent des hélicoïdes dont le pas est le même que celui des tourbillons de l'hélice optimum généralisée qui absorbe, dans les mêmes conditions, la même puissance.* La détermination de ce pas ne présente donc pas de difficulté, la seule condition à remplir pour pouvoir appliquer la méthode basée sur la relation (I,49) étant la connaissance préalable du coefficient C'_0 dont les méthodes de calcul simplifiées donnent très rapidement une valeur approchée (2).

Un procédé encore plus simple consiste à appliquer une formule empirique du type proposé par Valensi (H.43) à la suite de mesures effectuées dans le sillage d'un certain nombre d'hélices:

$$(I, 50) \quad \lambda^* = a\lambda + (1 - a)\lambda_0,$$

a étant un coefficient numérique, et λ_0 le fonctionnement de traction nulle. La méthode déduite de la relation (I,49), appliquée à une hélice donnée quelconque à partir des valeurs $C'_0(\lambda)$ de la caractéristique expérimentale de puissance permet de constater la variation pratiquement linéaire de λ^* en fonction de λ (3); mais la pente $d\lambda^*/d\lambda$ dépend bien entendu de l'hélice considérée, au même titre que la caractéristique de couple dont on part et on peut aisément en obtenir une expression approchée (2).

(1) On trouvera en (H.66) les réseaux de paraboles déduits des solutions de Goldstein pour $p = 2, 3, 4$.

(2) Par exemple, les méthodes de section unique; cf. R. SIESTRUNCK, Cours de l'Ecole Spéciale de Travaux Aéronautiques.

(3) R. SIESTRUNCK: Sur le calcul du pas des tourbillons marginaux des hélices; 1^{er} Congrès National de l'Aviation Française, Rapport n° 453.

1.4.6. Revenons au problème général de l'hélice moyennement chargée quelconque, λ^* étant supposé connu. Les vitesses induites sur une pale sont liées par:

$$(I, 43) \quad \lambda^* v + u \xi = 0,$$

mais la relation (I,44) n'est pas valable, la vitesse induite résultant de u et v étant normale à la surface tourbillonnaire d'après (I,43), mais non à la vitesse résultante $\vec{W}'$, sauf peut-être en certains points de la pale.

Dans l'évaluation de la vitesse résultante

$$W' = \sqrt{(\lambda+v)^2 + (\xi+u)^2} = \sqrt{W^2 - 2v(\lambda^*-\lambda) + w^2},$$

on remarquera que la différence $\lambda^*-\lambda$ est du même ordre de grandeur que les vitesses induites (cf. par exemple (I,45) dans le cas de l'hélice optimum généralisée, où $v(\lambda^*-\lambda) = w^2$); par conséquent, on aura toujours, au deuxième ordre près en w :

$$W' \sim W = \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}.$$

Enfin, la formule générale (I,20) qui exprime l'angle induit conduit ici à:

$$\delta i = \frac{\lambda\lambda^* + \xi^2}{\lambda^2 + \xi^2} \frac{w}{\sqrt{\lambda^{*2} + \xi^2}};$$

mais on a déjà négligé, dans l'établissement de cette formule, les termes du second ordre en w , et par conséquent il est inutile de garder ici ce qui est de l'ordre de w^2 ; le développement limité de δi obtenu en remplaçant λ^* par $\lambda + \theta$ donne

$$(I, 50) \quad \delta i = \frac{w}{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}},$$

et ne contient pas de termes en $w\theta$, si bien que les deux formules sont équivalentes au troisième ordre près.

Il en résulte que la détermination des circulations en envergure revient à celle du potentiel $\varphi(\xi, \xi^*)$ ayant la symétrie hélicoïdale d'ordre p , et vérifiant sur la pale la condition

$$(I, 23) \quad \varphi(\xi, 0) = \frac{kt}{2} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \left[i(\xi) + \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_{\xi^*} = 0 \right],$$

ce qui généralise le problème de l'hélice au cas des charges moyennes, dans la mesure où on peut encore négliger les puissances supérieures des vitesses induites devant W et où tous les profils travaillent à des incidences où la caractéristique $c_x(i)$ est encore linéaire.

1.4.7. Problème d'optimum tourbillonnaire. — Les propriétés de symétrie connues des potentiels $\varphi(\xi, \xi^*)$, jointes à l'expression de la perte d'énergie induite (I,34)

$$C_E = 2p \int (v\xi - \lambda u) \Gamma d\xi = 2p \int \frac{\lambda\lambda^* + \xi^2}{\sqrt{\lambda^{*2} + \xi^2}} w \Gamma d\xi \sim 2p \int \sqrt{\lambda^{*2} + \xi^2} w \Gamma d\xi,$$

permettent de traiter le problème d'optimum tourbillonnaire comme pour l'hélice infiniment peu chargée. On vérifie ainsi aisément que les hélices optima généralisées assurent le minimum de C_E pour une valeur donnée de l'intégrale:

$$C_T = 2p \int \Gamma \xi d\xi.$$

Un problème d'adaptation, à partir des données C'_0 et λ , comporte donc d'abord la détermination de λ^* par la méthode (I,49) d'où résulte la valeur de la constante d'adaptation $\theta = \lambda^* - \lambda$; si on suppose alors comme la solution (I,47), il suffit que les cordes et les gauchissements soient liés par:

$$\Gamma = kt \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \left[i(\xi) - \theta \frac{\xi}{\sqrt{(\lambda^2 + \xi^2)(\lambda^{*2} + \xi^2)}} \right]$$

pour que l'hélice considérée soit une solution théorique du problème.

2. MÉTHODE D'ANALOGIE ÉLECTRIQUE POUR L'INTÉGRATION DES PROBLÈMES DE L'HÉLICE

Les travaux modernes sur la théorie tourbillonnaire de l'hélice (1) tendent à une évaluation de plus en plus correcte des vitesses induites, au prix d'une complexité croissante des calculs; il semble même que la difficulté et la longueur d'application de ces méthodes soient hors de proportion avec le résultat cherché, qui ne représente jamais qu'une solution de première approximation des problèmes de l'hélice en fluide incompressible. La méthode que nous proposons ici a l'avantage de donner la même solution en quelques minutes de calcul seulement et avec un temps d'expérimentation très court; la lecture de ce chapitre montrera, mieux qu'on ne pourrait le dire ici, tout le bénéfice que la mise au point du *Calculateur d'Hélices* a pu retirer des études faites depuis quinze ans au Laboratoire de calcul analogique sur le *Calculateur d'Ailes*.

2. 1. SOLUTION DE L'ÉQUATION DE GOLDSTEIN PAR ANALOGIE ÉLECTRIQUE (2)

2.1.1. L'équation de Goldstein

$$(I, 6) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^{*2}} = 0$$

vérifiée par le potentiel des vitesses induites attaché au fonctionnement de l'hélice rentre dans la classe des équations intégrables mécaniquement par le procédé d'analogie électrique (3). Il suffit, en effet, d'effectuer un changement de variables rendant isotropes les caractéristiques de l'équation, opération qui n'est évidemment déterminée qu'à une transformation conforme arbitraire près. Nous développerons ici celle de ces transformations qui nous a paru la plus naturelle et la plus commode au point de vue du montage électrique. Nous traiterons de prime abord le problème en tenant compte de la correction de sillage qui fait passer de λ à λ^* pour une hélice moyennement chargée; les formules se simplifient un peu, comme on le verra immédiatement, lorsqu'on confond λ et λ^* , ξ et ξ^* .

Considérons, en coordonnées semi-polaires, r, θ, z , la répartition du potentiel électrique Φ dans un conducteur d'épaisseur *lentement variable* h comptée suivant Oz ; le conducteur est supposé de révolution autour de l'origine O , si bien que h ne dépend que de r : à condition que dh/dr soit petit, Φ ne dépend pratiquement pas de z , et le champ électrique E n'a que les deux composantes

$$E_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

(1) Voir les principales références en H.39.

(2) R. SIESTRUNCK: Comptes rendus, 219, 1944, p. 411-413.

(3) Pour plus de détails, et également en ce qui concerne les montages électriques, on se reportera aux ouvrages de J. PÉRÈS et L. MALAVARD. En particulier, L. MALAVARD, Etude de quelques problèmes relevant de la théorie des Ailes, *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, n° 153, 1939.

Si nous écrivons que $\text{div } \vec{E} = 0$, nous obtenons l'équation vérifiée par Φ par rapport aux variables r, θ :

$$(II, 1) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(hr \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad h = h(r).$$

2.1.2. Nous nous proposons de définir la loi de profondeur $h(r)$ et la transformation $\mu(r)$ qui fait passer de l'équation de Goldstein, où on a posé $\mu = \xi/\lambda^*$

$$(I, 6') \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^{*2}} = 0,$$

à l'équation (II,1); il est clair en effet d'après la forme des deux équations, qui ne contiennent les angles polaires que par $\partial^2 \Phi / \partial \theta^2$ et $\partial^2 \varphi / \partial \zeta^{*2}$, que l'on peut effectuer cette transformation en gardant $\theta = \zeta^*(1)$ et qu'il suffit de déterminer la correspondance entre les rayons vecteurs.

Développons (II,1) en désignant par h' la dérivée dh/dr :

$$hr \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + (h'r + h) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{h}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0,$$

puis effectuons dans (I,6') la transformation $\mu = \mu(r)$, $\theta = \zeta^*$; on obtient, en désignant par $\dot{r}$, $\ddot{r}$ les dérivées de r par rapport à μ :

$$\mu \dot{r}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + (\dot{r} + \mu \ddot{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 + \mu^2}{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0.$$

Identifions les deux équations en assimilant le potentiel des vitesses φ au potentiel électrique Φ du bassin; on obtient le système

$$(II, 2) \quad \frac{\mu \dot{r}^2}{hr} = \frac{\dot{r} + \mu \ddot{r}}{h'r + h} = \frac{(1 + \mu^2) \dot{r}}{h\mu}.$$

En égalant les termes extrêmes, on a une équation à variables séparées qui définit la transformation:

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} = \frac{1 + \mu^2}{\mu^2},$$

d'où

$$(II, 3) \quad r = C_1 e^{\sqrt{1 + \mu^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \mu^2} - 1}{\sqrt{1 + \mu^2} + 1}},$$

C_1 étant une constante d'échelle arbitraire.

La profondeur s'obtient alors par exemple au moyen de la première équation (II,2):

$$\frac{\mu \dot{r}^2}{hr} = \frac{\dot{r} + \mu \ddot{r}}{h'r + h},$$

qui s'écrit, si on pose

$$\dot{h} = \frac{dh}{d\mu} = h'r:$$

$$\frac{\dot{h}}{h} = -\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\ddot{r}}{\dot{r}} + \frac{1}{\mu},$$

soit

$$(II, 4) \quad h = C_2 \frac{\mu \dot{r}}{r} = C_2 \sqrt{1 + \mu^2},$$

en introduisant une deuxième constante d'échelle C_2 .

(1) On pourrait évidemment aussi prendre θ proportionnel à ζ^* : $\theta = A\zeta^*$, le second membre de (II,3) étant alors à élever à la puissance A .

2.1.3. Etude de la transformation. — D'après (II,5), on voit que la fonction de transformation $r/C_1 = R(\mu)$ définit une correspondance biunivoque entre les rayons vecteurs, dans laquelle

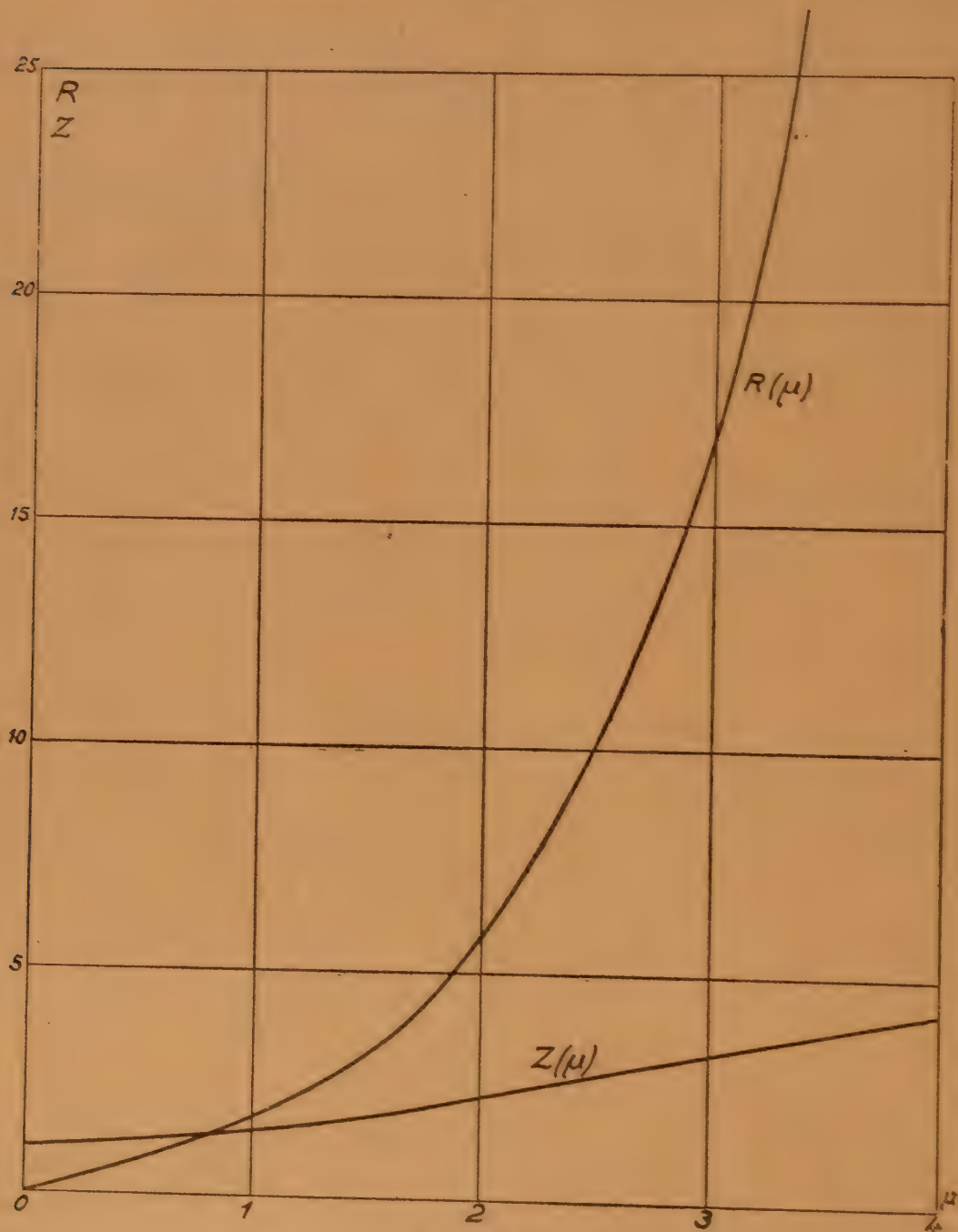


Fig. 2.1.3.

sont homologues les points à l'infini ($R \sim e^\mu$) et les origines ($\mu = 0, R = 0$). La fig. 2.1.3 représente la correspondance dans le domaine de l'origine; pour les valeurs plus grandes de μ , il convient d'adopter une représentation logarithmique.

D'après (II,4), la profondeur réduite au point de rayon vecteur réduit R est:

$$Z = \frac{h}{C_2} = \sqrt{1 + \mu^2};$$

l'élimination de μ entre les expressions $R(\mu)$, $Z(\mu)$ donne l'équation

$$(II, 5) \quad R = e^{\frac{Z}{\sqrt{Z-1}} \sqrt{\frac{Z-1}{Z+1}}}.$$

Le milieu conducteur dans lequel le potentiel électrique est analogue du potentiel aérodynamique φ remplit d'après ce qui précède le volume compris entre le plan de cote $Z = 0$ et la surface de révolution dont la méridienne est (II,5); mais, en pratique, la réalisation d'un milieu conducteur d'épaisseur variable s'effectue plus commodément en remplissant d'un électrolyte approprié (l'eau en général) un bassin dont le fond est modelé suivant un profil convenable, la distance entre la surface libre de l'électrolyte et le fond étant en chaque point égale à $h(r)$; dans le cas actuel, le fond a évidemment un profil de révolution, et il est clair qu'on peut adopter dans sa construction les méridiennes qui se déduisent de la précédente $R(Z)$ par toutes les affinités possibles sur R et sur Z (obtenues en donnant à C_1 et C_2 des valeurs quelconques). Il importe dans la réalisation pratique d'utiliser convenablement ces facteurs d'échelle de façon à simplifier la construction et la manipulation tout en respectant l'hypothèse de départ sur la variation lente de $h(r)$.

2.1.4. Domaine d'étude de φ dans le plan $r(\zeta^*)$. — Nous avons rappelé au chapitre I que le domaine dans lequel la connaissance de φ était nécessaire à la description complète de l'écoulement additionnel était un secteur du plan (ξ, ζ^*) qu'on peut toujours ramener à:

$$0 \leq \zeta^* \leq \frac{\pi}{p}.$$

D'autre part, le potentiel φ attaché au fonctionnement d'une hélice quelconque vérifie, aux frontières de ce domaine, des conditions aux limites du type mixte, parmi lesquelles on a, quel que soit le cas traité:

$$\varphi = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta^* = \frac{\pi}{p} \\ \zeta^* = 0, \zeta > 1. \end{array} \right.$$

Sur le segment $\zeta^* = 0, \xi < 1$ représentatif d'une pale, les conditions varient suivant qu'on traite un problème d'optimum (conditions de Neumann) ou de fonctionnement (condition de Fourier). Dans tous les cas l'inconnue primordiale est la valeur de φ sur ce segment.

Il résulte de ces conditions aux limites et du fait que les seuls cas pratiques correspondent à $p \geq 2$, que la réalisation à effectuer est celle du quadrant

$$0 \leq \zeta^* \leq \frac{\pi}{2},$$

nécessaire dans son ensemble lorsque $p = 2$, mais dont on n'utilisera que la portion voulue lorsque $p > 2$, grâce au déplacement d'une paroi mobile sur laquelle on maintiendra $\varphi = 0$; si la même condition $\varphi = 0$ est d'autre part réalisée en permanence sur la frontière $\zeta^* = \pi/2$, on voit que toute solution de l'équation de Goldstein nulle aux frontières du domaine complémentaire

$$\frac{\pi}{p} \leq \zeta^* \leq \frac{\pi}{2}$$

et régulière dans ce domaine y est identiquement nulle; interprétée au point de vue analogique, cette propriété montre qu'on peut résoudre les problèmes relatifs à un nombre de pales quelconque, sans rien changer au montage électrique, par simple déplacement, dans le bassin, de la frontière du domaine de définition de φ .

2.1.5. Avec les variables (μ, ζ^*) , la pale est représentée par le segment

$$\zeta^* = 0, \quad 0 \leq \mu \leq \frac{1}{\lambda^*};$$

son extrémité dépend du pas des tourbillons, et il en est de même après le changement de variables qui fait passer au plan (r, ζ^*) ; par conséquent, dans l'analogie électrique, l'extrémité des pales occupe une place variable sur la frontière $\zeta^* = 0$ lorsqu'on fait varier le fonctionnement.

2.1.6. Conditions aux limites sur les pales. — Dans le cas général de recherche des circulations en envergure pour une valeur donnée de λ et de λ^* , la condition vérifiée par φ sur la pale est (I, 23) (N^{os} 1.2.3. et 1.4.6.); toutefois, la dérivée normale qui figure dans cette formule correspond à une dérivation normalement à l'hélicoïde tourbillonnaire; on passe avec les variables ξ, ζ^* à la dérivée par rapport à ζ^* par la relation:

$$(I, 15) \quad \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_{\zeta^*=0} = \frac{\sqrt{\lambda^{*2} + \xi^2}}{\lambda^*} \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta^*} \right)_{\zeta^*=0};$$

mais il est intéressant d'introduire la dérivée de φ prise normalement à l'axe polaire $\zeta^* = 0$ dans le plan r, ζ^* ; nous la désignerons par

$$\left(\frac{d\varphi}{dN} \right)_{\zeta^*=0} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta^*} \right)_{\zeta^*=0}.$$

On peut alors, en introduisant cette relation, écrire (I, 23) sous la forme

$$\varphi(\xi, 0) = \frac{kt}{2} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \left[i(\xi) + \sqrt{\frac{\lambda^{*2} + \xi^2}{\lambda^2 + \xi^2}} \cdot \frac{r}{2\lambda^* \xi} \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)_{\zeta^*=0} \right],$$

ou encore avec la variable μ :

$$\varphi(\mu, 0) = \frac{kt}{2} \lambda^* \sqrt{\mu^2 + (\lambda/\lambda^*)^2} i(\mu) + \frac{kt}{4} \frac{r \sqrt{1 + \mu^2}}{\mu \lambda^*} \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)_{\zeta^*=0}.$$

Pour simplifier les calculs ultérieurs, développons le radical $\sqrt{\mu^2 + (\lambda/\lambda^*)^2}$ en fonction de la différence $\theta = \lambda^* - \lambda$, en nous limitant au premier terme puisque l'angle induit est lui-même exprimé avec cette approximation:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right)^2 = \left(1 - \frac{\theta}{\lambda^*} \right)^2 \sim 1 - \frac{2\theta}{\lambda^*},$$

et

$$\sqrt{\mu^2 + (\lambda/\lambda^*)^2} \sim \sqrt{1 + \mu^2 - 2\theta/\lambda^*} \sim \sqrt{1 + \mu^2} \left[1 - \frac{\theta}{\lambda^* (1 + \mu^2)} \right];$$

d'où la forme définitive de l'équation de fonctionnement:

$$(II, 6) \quad \varphi(\mu, 0) = \frac{kt}{2} i(\mu) \left[\lambda^* \sqrt{1 + \mu^2} - \frac{\theta}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right] + \frac{kt}{4} \frac{r \sqrt{1 + \mu^2}}{\lambda^* \mu} \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)_{\zeta^*=0}.$$

2.1.7. Cette relation linéaire doit être vérifiée en tout point du segment figurant la pale dans le plan (r, ζ^*) ; du point de vue pratique, on ne la réalisera qu'en un certain nombre de points en prolongeant le domaine homogène de détermination de φ constitué par le milieu conducteur, par un domaine à conductivité linéaire dans lequel (II, 6) soit la traduction de la loi d'Ohm (1). On constituera donc la frontière $\zeta^* = 0$ du bassin électrique par des électrodes métalliques en nombre assez grand pour que le remplacement de la loi continue $\varphi(\mu)$ par une fonction étagée soit possible avec une bonne approximation, chaque électrode étant prolongée à l'extérieur du bassin par une résistance ρ aboutissant à un potentiomètre.

(1) Cf. MALAVARD, loc. cit., pour l'interprétation de l'équation de Prandtl.

Soit ε la largeur d'une électrode située au rayon moyen r , $h(r)$ sa hauteur moyenne; elle débite dans le milieu conducteur qu'elle limite une intensité totale

$$I = -\frac{h\varepsilon}{\sigma} \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)_{r^*=0},$$

σ étant la résistivité du milieu, et φ étant cette fois interprété comme un potentiel électrique. Il en résulte que

$$\left(\frac{d\varphi}{dN} \right)_{r^*=0} = -\frac{\sigma I}{h\varepsilon},$$

si bien que (II,6) prend la forme

$$\bar{\varphi} - \varphi = \rho I,$$

avec

$$(II, 7) \quad \begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{kt}{2} i(\mu) \left[\lambda^* \sqrt{1+\mu^2} - \frac{\theta}{\sqrt{1+\mu^2}} \right], \\ \rho &= \frac{kt}{4} \frac{r \sqrt{1+\mu^2}}{\lambda^* \mu h} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}; \end{aligned}$$

Si on règle les potentiomètres et les résistances d'alimentation aux valeurs respectives $\bar{\varphi}(\mu)$ et $\rho(\mu)$, la condition (II,6) s'identifie bien avec la loi d'Ohm écrite pour le circuit d'alimentation de chaque électrode, et se trouve donc être vérifiée en chacun des points distingués sur la pale.

2.2. MONTAGE CALCULATEUR D'HÉLICES ⁽¹⁾

2.2.1. Un montage provisoire fut d'abord effectué, dans lequel un secteur rectangulaire isolant d'épaisseur variable fut appliqué dans la cuve du Calculateur d'Ailes, de façon à en modifier la profondeur conformément aux calculs précédents; la plaquette porte-électrodes et toute l'alimentation du Calculateur d'Ailes subsistaient dans ce montage, qui présentait évidemment des difficultés dans la réalisation d'une bonne étanchéité aux joints entre les parois de la cuve (notamment sur les électrodes) et le fond rapporté; on put en conclure cependant avec facilité que l'appareil était susceptible d'une bonne précision; une étude qualitative des corrections de parois permit de vérifier que, grâce aux conditions aux limites particulières imposées aux potentiels hélicoïdaux, on pouvait envisager des bassins de dimensions réduites sans que la limitation du champ entraîne des erreurs notables sur les circulations.

2.2.2. Cette étude préliminaire conduisit à la réalisation du Calculateur d'Hélices actuel, désigné par le numéro II dans ce qui suit, qui comporte 4 bassins indépendants. En effet, on a vu que, les deux constantes d'échelle C_1 et C_2 une fois fixées, la forme du bassin est entièrement déterminée, d'une manière qui ne dépend des conditions de fonctionnement de la pale réelle ξ , λ^* que par $\mu = \xi/\lambda^*$; un même bassin peut servir à l'étude d'une infinité de fonctionnements λ^* , mais bien entendu la correspondance entre r et ξ est chaque fois différente; en particulier, le segment figurant la pale a, dans le bassin, une longueur qui dépend de λ^* .

Il serait donc en principe possible d'atteindre toute la gamme usuelle des fonctionnements au moyen d'un seul bassin; mais la correspondance $r(\mu)$ étant pratiquement exponentielle pour les grandes valeurs de μ (faibles λ^*), ce bassin unique devrait avoir des dimensions trop étendues pour être d'un usage commode; c'est pourquoi nous avons choisi pour couvrir l'échelle usuelle des fonctionnements quatre bassins qui diffèrent entre eux par des choix appropriés de C_1 et C_2 , et qui sont utilisables chacun dans un certain intervalle de fonctionnement.

(1) R. SIESTRUNCK: Problèmes de la Théorie de l'Hélice propulsive; VI^e Congrès International de Mécanique Appliquée, Paris, 1946.

Bassin	Intervalle de fonctionnement	C_1	C_2
II. A	$0,18 \leq \lambda^* \leq 0,25$	0,130	1
II. B	0,25 0,35	0,440	1,5
II. C	0,35 0,60	1,563	2
II. D	0,60 1,35	5,387	2,5

Le choix de C_1 décide du domaine de variation de μ que l'on veut représenter sur les premiers centimètres du bassin (l'expérience acquise sur le Calculateur d'Ailes conduit à utiliser des plaquettes porte-électrodes d'une vingtaine de centimètres de longueur), c'est-à-dire de l'intervalle de λ^* que l'on veut atteindre. C_2 n'intervient que dans le calcul des profondeurs, et son choix n'est fixé que par des raisons de construction: une grande valeur de C_2 exagère la rapidité de variation de la profondeur et s'oppose donc à l'hypothèse de départ; une faible valeur par contre entraîne de petites épaisseurs d'électrolyte, notamment au voisinage de l'origine, ce qui augmente l'imprécision et les difficultés expérimentales: on a donc chaque fois été conduit à un compromis d'où ont résulté les valeurs ci-dessus.

2.2.3. En ce qui concerne l'intervalle d'utilisation de chaque bassin, nous avons procédé de la manière suivante: la limite supérieure de λ^* qui figure dans le tableau ci-dessus est la valeur obtenue en admettant que le segment figurant la pale prend fin au début de la sixième électrode. Il est en effet difficile d'admettre qu'on puisse déterminer avec précision la répartition de circulation avec moins de 5 points distingués sur l'envergure; c'est pourquoi, dans tous les montages, les 5 premières électrodes sont toujours alimentées, et représentent toujours des points de la pale.

Pour chaque bassin, le nombre total d'électrodes est voisin de 15, l'axe polaire $\xi^* = 0$ qui les porte étant ensuite prolongé par une plaque de garde sur laquelle on réalise la condition $\varphi = 0$. Lorsque la pale est supposée s'étendre jusqu'au point où commence l'électrode de garde, on a atteint la valeur minimum de λ^* pour laquelle puisse être utilisé le bassin: la répartition de circulation est alors déterminée par ses valeurs en 15 points de la pale.

Au total, on pourra avec un bassin résoudre les problèmes qui se poseront pour les 10 valeurs différentes de λ^* correspondant successivement aux cas où la pale se termine à la 7^e, 8^e, ..., 14^e électrode. Ces valeurs de λ^* sont évidemment indépendantes de chaque problème particulier et entièrement déterminées par le choix de C_1 d'une part, de la largeur des électrodes d'autre part: on aurait donc très bien pu s'imposer de choisir ces largeurs d'électrodes de façon que les valeurs de λ^* atteintes dans un même bassin varient d'une électrode à la suivante d'une même fraction de l'intervalle total de fonctionnement de l'appareil; mais il n'y avait pas là un intérêt essentiel, et nous avons préféré, pour des raisons de construction, n'utiliser que 4 largeurs d'électrodes, réparties de façon à égaliser le plus possible les écarts entre les fonctionnements successifs.

Le détail des valeurs de λ^* que permet d'atteindre le jeu des 4 bassins du Calculateur d'Hélices II est donné ci-dessous; le numéro qui figure en tête de chaque colonne est celui de l'électrode au début de laquelle cesse la pale.

	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	garde
II. A	0,250	0,234	0,223	0,215	0,208	0,203	0,198	0,192	0,187		0,183
II. B	0,355	0,334	0,310	0,294	0,280	0,271	0,262	0,256			0,250
II. C	0,600	0,551	0,511	0,465	0,433	0,410	0,390	0,374	0,362		0,352
II. D	1,351	1,175	1,052	0,956	0,885	0,828	0,778	0,715	0,669	0,628	0,600

(1) Valeurs en centimètres.

Bien entendu, toutes les fois où la pale n'est figurée que par quelques-unes des électrodes, toutes celles qui sont situées au delà sont portées au potentiel 0, prolongeant ainsi l'électrode de garde jusqu'à l'extrémité de la pale.

2.2.4. Détails expérimentaux. — Les figures ci-jointes représentent respectivement le schéma d'alimentation électrique du Calculateur d'Hélices (montage du Calculateur d'Ailes) et une vue d'un des bassins dans un montage pour un calcul d'hélice tripale.

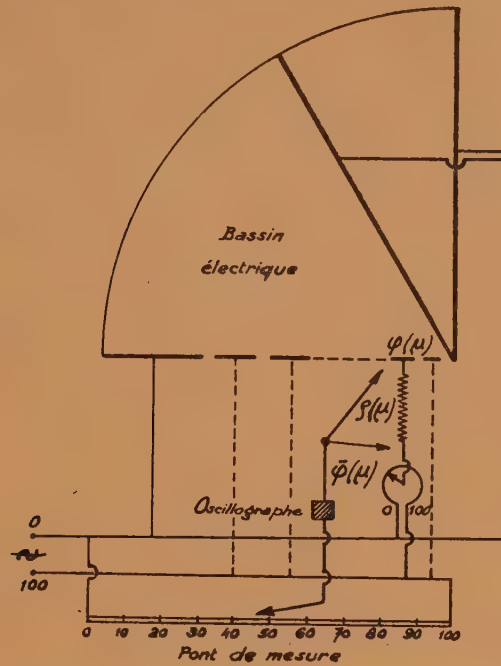


Fig. 2.2.4. a

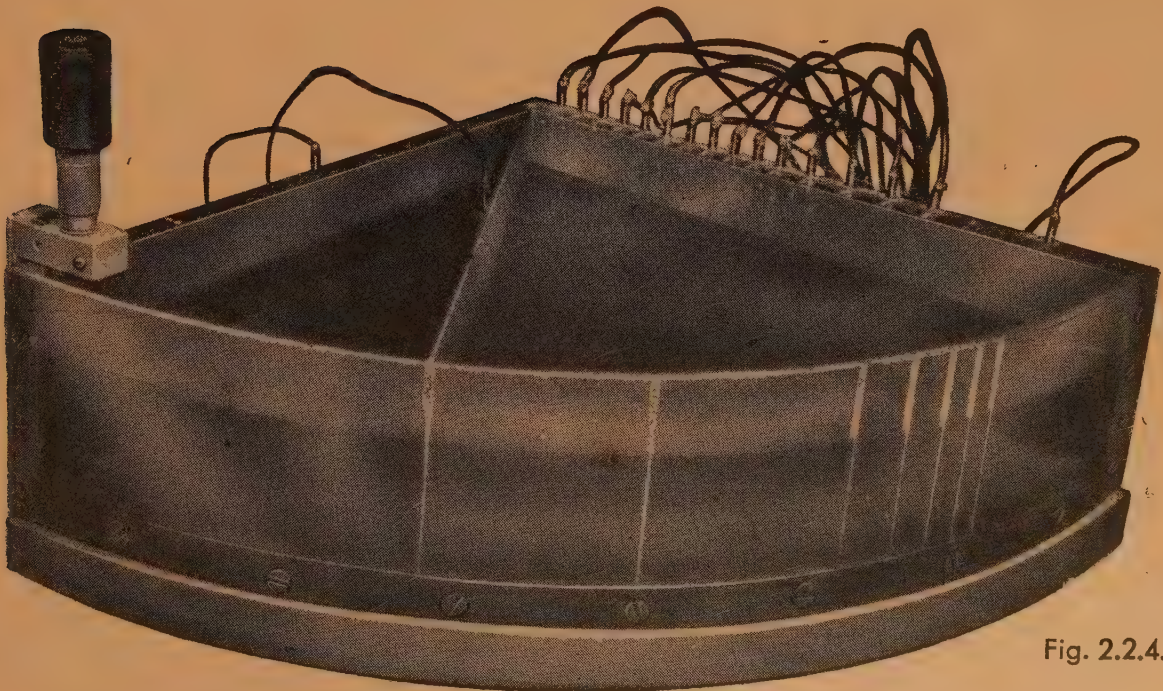


Fig. 2.2.4. b

Le matériau utilisé devait être à la fois parfaitement isolant et facile à modeler et à coller, de façon que les joints de montage des parois latérales sur le fond du bassin soient parfaits. Nous avons retenu initialement le plexiglas, et c'est en effet la matière qui constitue le bassin II.A; malheureusement, les blocs assez épais nécessaires aux fonds étaient particulièrement difficiles à obtenir et nous ne disposions pas des presses suffisantes pour réaliser nous-mêmes ces blocs par collage de plaques plus minces et plus aisées à trouver. C'est pourquoi les trois derniers bassins ont un fond en « stabonite », matière qui avait déjà été expérimentée au laboratoire en vue d'usages analogues, et dont nous disposions en bandes assez épaisses; la colle employée à la réalisation des joints est une dissolution commerciale de plexiglas, qui s'est révélée excellente puisqu'aucune difficulté due à l'étanchéité des modèles ne s'est présentée.

L'appréciation exacte du niveau de l'eau s'opère au moyen d'un pointeau micrométrique fixé à l'extrémité de la plaque de garde normale à la pale et disposé de telle sorte que le zéro de sa graduation corresponde à la position dans laquelle le pointeau prend contact avec la surface libre de l'eau quand celle-ci atteint le niveau théorique. Le bassin est disposé sur une surface plane horizontale (en général le fond nivelé du bassin du Calculateur d'Ailes); pendant le remplissage, le pointeau est remonté de quelques millimètres afin qu'il ne se produise pas de contact prématuré avec la surface agitée du liquide; lorsqu'on redescend le pointeau, on observe le contact électriquement, et on peut ainsi amener très rapidement l'épaisseur d'eau à sa valeur théorique avec une précision qui dépasse le $1/10^e$ de millimètre, ce qui est largement suffisant.

Comme nous l'avons déjà indiqué, la paroi $\xi^* = \pi/2$ qui limite chaque bassin est métallique, et portée constamment au potentiel zéro; l'influence du nombre de pales s'étudie en faisant pivoter autour de l'origine une paroi métallique s'appliquant exactement sur le fond; les angles π/p reiatifs aux valeurs usuelles de p sont repérés sur la paroi marginale du bassin par un trait de fraise dans lequel vient s'engager l'extrémité de la paroi mobile.

Le reste du montage est exactement celui du Calculateur d'Ailes, et nous n'insisterons pas davantage sur la manipulation du Calculateur d'Hélices; disons seulement que, d'une part, il n'est pas possible ici d'éviter la mesure de la résistivité de l'eau, qui s'effectue au moyen d'une cellule de résistivité immédiatement avant et après chaque expérience, et que, d'autre part, les conditions aux limites réalisées dans le bassin entraînent des phénomènes de polarisation des électrodes particulièrement sensibles au voisinage de l'origine, le bon fonctionnement de l'appareil étant entièrement conditionné par l'état de propreté des électrodes. Nous renvoyons pour tous les détails d'expérimentation aux travaux cités de L. Malavard.

2.2.5. Dispositions pratiques pour les calculs d'hélices. — Reportons-nous aux relations (II,7) qui définissent les données électriques du calcul expérimental d'une hélice en fonction des données géométriques et aérodynamiques de la pale et des caractéristiques du bassin; nous poserons:

$$(II, 8) \quad A = \frac{\lambda^* \sqrt{1 + \mu^2}}{2}, \quad A' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad B = \frac{r}{4 C_2 \varepsilon \lambda^* \mu}$$

de telle sorte que, une fois ces coefficients calculés pour chaque électrode, on a les relations simples

$$(II, 7') \quad \begin{aligned} \bar{\varphi} &= (kt i) (A - \theta A') \\ \rho &= (kt) \sigma B, \end{aligned}$$

σ représentant la résistivité de l'eau du bassin, déterminée comme il a été dit précédemment.

Le coefficient A' , qui est le moins important puisqu'il intervient dans un terme correctif, ne dépend que de μ , et a par conséquent une valeur unique pour chaque électrode (1). Il n'en est pas de même de A et B , qui pour une même électrode, varient respectivement comme le fonctionnement λ^* auquel on opère et son inverse; ces coefficients ont donc des valeurs différentes suivant l'étendue qu'occupe la pale sur la plaquette porte-électrode. Il n'y a là rien de surprenant, puisqu'une électrode correspond à une valeur bien définie de μ , mais à des abscisses $\xi = \lambda^* \mu$ variables en envergure suivant la valeur de λ^* choisie. Pour rendre systématique l'usage du Calculateur d'Hélices, il nous a donc paru nécessaire d'affecter à chaque valeur de λ^* , un tableau indiquant d'une part les valeurs des abscisses des points distingués sur la pale auxquels on doit connaître initialement les quantités k , t , i , et d'autre part les valeurs des coefficients A , A' , B à utiliser. Nous reproduisons ci-contre quelques-uns de ces tableaux, qui rendent immédiat tout calcul expérimental des circulations sur une hélice.

(1) La valeur de μ que nous faisons correspondre à une électrode, c'est-à-dire l'abscisse du point distingué de l'envergure qu'elle représente, est celle qu'on déduit de la transformation (II,3) en calculant r au milieu de l'électrode.

CALCULATEUR D'HÉLICES II C - Fin de plaquette 14, $\lambda^* = 0,362$

[illegible]

CALCULATEUR D'HÉLICES II C - Fin de plaquette 6, $\lambda^* = 0,600$

E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ξ	0,166	0,448	0,652	0,808	0,931										
A	0,3111	0,3741	0,4431	0,5034	0,5538										
A'	0,482	0,401	0,339	0,298	0,271										
B	0,3773	0,4188	0,4790	0,5412	0,6040										

$\bar{\varphi} = (Kt) (A - \theta A')$

$R = (Kt) \sigma B$

CALCULATEUR D'HÉLICES II-A - Fin de plaquette 12, $\lambda^* = 0,198$

E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ξ	0,357	0,556	0,652	0,716	0,764	0,813	0,862	0,902	0,934	0,961	0,986				
A	0,204	0,295	0,341	0,372	0,395	0,419	0,443	0,462	0,477	0,491	0,503				
A'	0,2427	0,1676	0,1454	0,1332	0,1254	0,1183	0,1119	0,1072	0,1037	0,1008	0,0984				
B	0,351	0,674	0,960	1,223	1,473	1,077	1,306	1,526	1,742	2,051	2,157				
$\bar{\varphi} = (Kt) (A - \theta A')$												$R = (Kt) \cdot B$			

CALCULATEUR D'HÉLICES II-A - Fin de plaquette 6, $\lambda^* = 0,25$

E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ξ	0,450	0,702	0,823	0,904	0,965										
A	0,258	0,373	0,430	0,469	0,499										
A'	0,2427	0,1676	0,1454	0,1332	0,1254										
B	0,278	0,534	0,760	0,967	1,166										

$\varphi = (Kti) (A - \theta A')$

$R = (Kt) \sigma \cdot B$

2.2.6. Remarque. — On constate sur les fiches précédentes se rapportant au bassin II.A que, dans le montage extrême où la pale est représentée par les six premières électrodes seulement ($\lambda^*=0,25$), la première d'entre elles, dont le centre se trouve à distance $r=0,6$ cm. de l'origine, représente sur la pale réelle un point situé presque au milieu de l'envergure ($\xi=0,450$). Cela est dû à l'allure exponentielle de la transformation (II.3), qui nous oblige dans ce cas à représenter dans le bassin la majeure partie de la pale sur la région voisine de l'axe de révolution, alors que l'image des extrémités de pale est beaucoup plus étendue. En général, ce phénomène ne présente pas d'inconvénients, puisque toute hélice comprend une zone neutre assez étendue autour du moyeu et que les parties marginales sont les plus actives; d'ailleurs, la disproportion s'atténue quand on atteint des valeurs plus grandes de λ^* , comme on peut s'en rendre compte sur les fiches qui se rapportent au bassin II.C.

2.2.7. Remarque. — Le bassin II.A est également intéressant par le fait que, même avec la faible hauteur d'eau que nous avons adoptée ($C_2=1$), il présente une loi de variation de cette hauteur qu'on peut difficilement admettre « lentement variable » dans le voisinage de l'origine. Il est remarquable que même lorsqu'on s'éloigne ainsi des conditions du calcul développé dans la première partie de cette étude, l'appareil continue à donner d'excellents résultats numériques; ce fait tient peut-être à la présence sur l'axe $\xi^*=0$ des électrodes verticales, sur lesquelles on a évidemment $\partial\psi/\partial z=0$, qui redressent le champ électrique et lui imposent de vérifier la condition essentielle de validité de la transformation.

2.3. VÉRIFICATION AU MOYEN DES SOLUTIONS DE GOLDSTEIN

2.3.1. Il importe de contrôler l'exactitude du montage électrique et le bon fonctionnement des bassins avant chaque expérience; pour le Calculateur d'Ailes, on fait usage des solutions élémentaires de l'équation de Prandtl, c'est-à-dire des répartitions elliptiques; nous disposons pour le Calculateur d'Hélices des solutions rigoureuses de Goldstein, qui ont été calculées pour un nombre limité, mais suffisant, de valeurs de λ^* .

On sait que ces solutions sont obtenues à partir de conditions aux limites qui, sur le segment portant, sont du type Neumann; pour refaire expérimentalement les calculs de Goldstein, il faudrait en principe que nous réglions l'intensité de courant sortant de chaque électrode de façon que les vitesses induites varient sur la pale suivant (1,38) :

$$v = \theta \frac{\xi^2}{\lambda^2 + \xi^2};$$

Mais un tel réglage demande en général de longs tâtonnements sur les valeurs des potentiels d'alimentation et des résistances à adopter, et il est beaucoup plus simple, puisque la solution du problème est connue numériquement, de procéder d'abord à un calcul d'adaptation optimum, puis de vérifier au moyen du bassin que la répartition de circulation de l'hélice ainsi calculée est bien celle que l'on s'est imposée.

Une telle adaptation n'entraîne entre les gauchissements et les cordes qu'une relation du type (1,41), et on peut en profiter pour vérifier la fidélité du Calculateur d'Hélices en choisissant pour une même adaptation différentes largeurs de pales ou lois de gauchissement; on constate, comme nous le verrons, que la concordance entre les circulations d'hélices très différentes mais prévues pour la même adaptation est excellente.

2.3.2. Pour rendre aussi simples que possible ces vérifications, nous prenons dans la solution (1,39) la constante θ égale à l'unité, et nous supposons $\lambda^* = \lambda$ (1); dans ces conditions on a :

$$\delta i = \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2}, \quad \Gamma = \frac{4\pi\lambda}{p} \Gamma^*(\xi, \lambda, p).$$

(1) Signalons ici une incohérence apparente des notations, qui tient à la différence des points de vue: pour une hélice optimum infiniment peu chargée, on admet $\lambda^* = \lambda$, mais une constante d'adaptation $\theta(\lambda)$ évidemment non nulle; pour une hélice optimum moyennement chargée, $\theta(\lambda^*)$ représente à la fois la différence $\lambda^* - \lambda$ et la constante d'adaptation.

Les calculs les plus récents et les plus complets des fonctions Γ^* sont ceux de Kramer (1), qui les donne d'une manière directement utilisable.

Nous adoptons des pales de profondeur fictive (2) constante donnée, soit

$$kt = u;$$

l'équation d'adaptation (1,41) s'écrit alors:

$$(II, 9) \quad \Gamma = 2\varphi = u \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \left[i\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) - \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2} \right],$$

et détermine l'incidence géométrique i ; avec la variable μ , on a:

$$i(\mu) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\Gamma}{u \sqrt{1 + \mu^2}} + \frac{\mu}{1 + \mu^2} \right].$$

Il suffit alors de porter les valeurs u , $i(\mu)$ dans les formules (II,7') pour être ramené à un calcul de répartition qui doit redonner $\Gamma(\mu)$.

Pour mieux se rendre compte de l'influence de la largeur de pale sur les données électriques du problème, remplaçons dans ces formules A par sa valeur; il vient

$$(II, 10) \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2} \left[\Gamma + u \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right], \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2}$$

$$\rho = B u \sigma,$$

expressions très simples, valables d'ailleurs pour une forme en plan quelconque et non pas seulement pour les pales de profondeur fictive constante. On constate que lorsque u tend vers zéro, les résistances ρ en font autant, et en conséquence $\bar{\varphi} \rightarrow \varphi$; à la limite, la condition sur la pale est du type Dirichlet, et la vérification n'en est plus une puisqu'on réalise d'emblée la valeur cherchée de φ . Inversement, à mesure que u augmente, $\bar{\varphi}$ diffère de plus en plus de φ , et s'il existe des erreurs de calcul ou des irrégularités dans le montage électrique, c'est dans ces conditions qu'elles apparaîtront. On a donc pu procéder dans ces expériences de vérification à une étude systématique de l'influence de la profondeur fictive qu'on a fait varier entre les limites extrêmes $0,1 \leq u \leq 1$: on a constaté le parfait accord entre les circulations fournies par les pales quelle que soit leur largeur. Nous reproduisons quelques résultats de cette étude:

a) Les solutions de Goldstein sont données explicitement par Kramer pour $\lambda^* = 0,25$ avec $p = 1, 2, 3, 4, 6, 8$; la vérification du bassin II.A au moyen de ces solutions est très satisfaisante (fig. 232), bien que l'on soit dans un cas défavorable, étant donné le petit nombre de points dont on dispose sur la pale. On voit d'après (II,10) qu'une telle étude à nombre de pales variable est très rapide: les valeurs de ρ , indépendantes de p , sont réglées une fois pour toutes si l'on opère assez vite pour que la résistivité σ n'ait pas le temps de varier de façon appréciable pendant l'expérience; d'autre part, tous les potentiels d'alimentation $\bar{\varphi}$ peuvent être calculés d'avance. La même simplicité se retrouve dans les problèmes de fonctionnement, si l'on cherche par exemple les circulations prises par une même pale montée successivement en multipale de différents ordres.

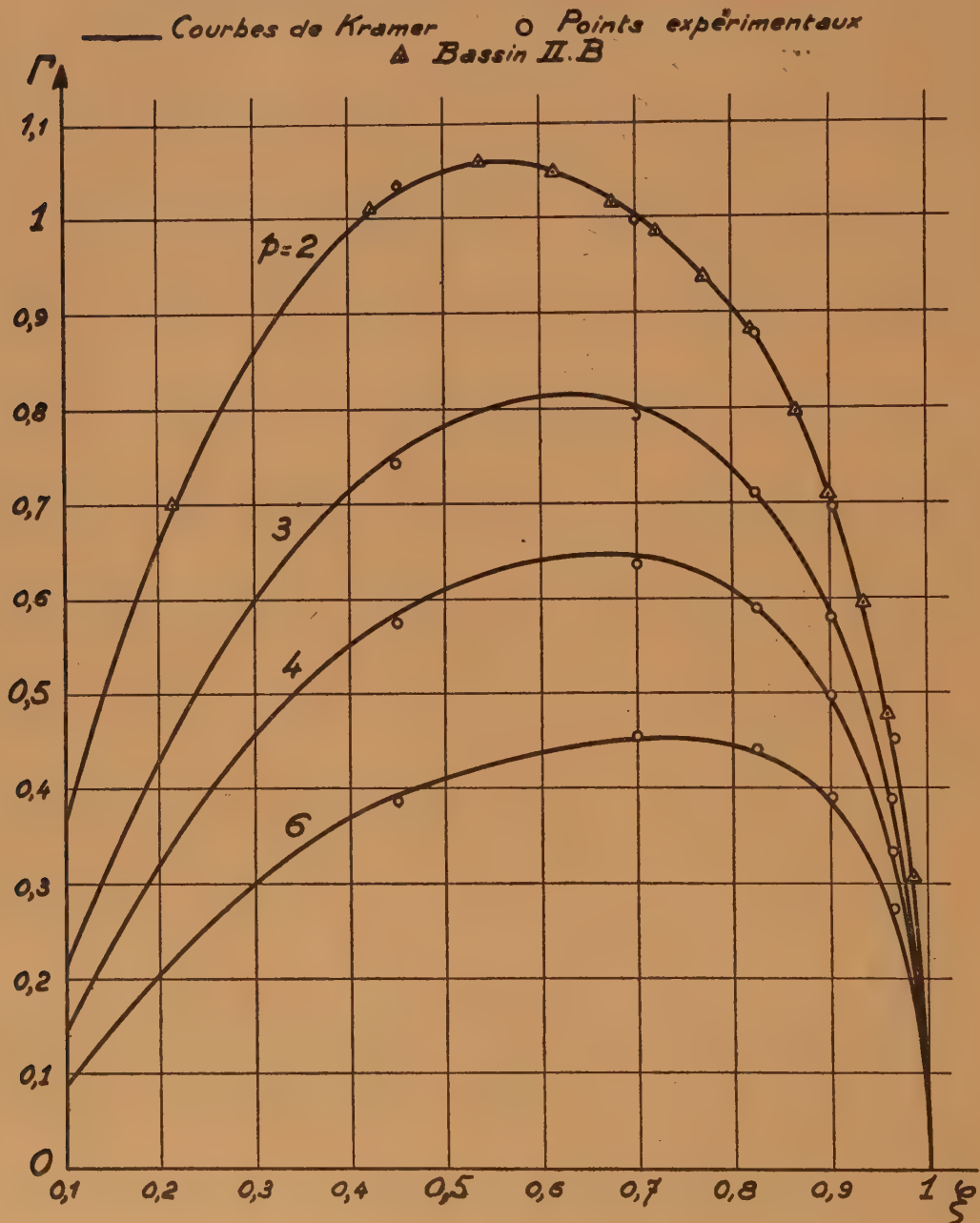
b) Les bassins II.A et II.B ont été calculés de manière que leurs gammes respectives de fonctionnement se rejoignent à la valeur $\lambda^* = 0,25$; on peut donc traiter les mêmes problèmes au moyen des six premières électrodes du bassin II.A ou des treize électrodes de II.B; nous avons reporté sur la fig. 2.3.2., pour $p = 2$, les points expérimentaux venant de II.B. On peut conclure que la précision de la méthode rhéoelectrique, telle qu'elle ressort des expériences de vérification des différents bassins, et de l'ordre de 1 %.

(1) KRAMER, Weiterführung von Goldsteins Lösung des Optimalproblems für Schraubenpropeller, F.B. 1531.

(2) Au sens de la théorie de l'aile: la profondeur fictive est le produit kt .

Fig. 2.3.2

Calculateur d'hélices II.A. $\lambda^* = 0,25$



2. 4. EXEMPLES D'EMPLOIS DU CALCULATEUR D'HÉLICES

2.4.1. Calcul d'une répartition de circulation. — Considérons l'hélice bipale ayant les caractéristiques suivantes (1) :

ξ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
l	0,1820	0,1904	0,1942	0,1935	0,1843	0,1695	0,1455	0,1039
$k^{(2)}$	2	2,24	2,58	2,69	2,75	2,81	2,90	3,00
α^0	56,3	45,0	36,9	31,0	26,6	23,5	20,65	18,5

Le pas aérodynamique est constant:

$$\xi \lg \alpha = 0,3 = \lambda_0;$$

supposons qu'on veuille déterminer la répartition de circulation sur la pale pour $\lambda^* = 0,198$, de façon à utiliser le bassin II.A avec 11 électrodes; ce régime correspond, en utilisant par exemple la formule de Valensi, à un fonctionnement égal à

$$\lambda = \frac{4 \lambda^* - \lambda_0}{3} = 0,164,$$

d'où

$$\theta = 0,034.$$

Le tableau suivant contient les calculs préparatoires et les résultats de l'expérience; les coefficients A, A', B se lisent sur la fiche reproduite figure 2.2.5. Nous rappelons ici que l'échelle potentiométrique du système d'alimentation du Calculateur d'Ailes est graduée de 0 à 100, et qu'afin de l'utiliser tout entière, il convient d'effectuer sur les potentiels (II,7') un changement d'échelle qui amène à 100 la valeur maximum de $\bar{\varphi}$; cette valeur maxima étant ici 1,769, on a donc en fait à afficher les potentiels électriques

$$\bar{\varphi}_e = \frac{100}{1,769} kti (A - \theta A'),$$

et la mesure du potentiel φ_e de chaque électrode conduit à la circulation Γ par l'opération

$$\Gamma = \frac{2 \varphi_e}{57,3} \cdot \frac{1,769}{100},$$

le facteur 57,3 venant de ce que l'unité d'angle utilisé dans k et dans i n'est pas la même.

(1) HELMBOLD: Systematische Versuche an Verstellluftschrauben; Luftfahrtforschung, t. 12, 1935; voir également H.72.

(2) Pour l'évaluation de k , l'unité d'angle est le radian. L'évolution rapide de k résulte de celle des profils, et de l'application de la règle de compressibilité de Prandtl (nombre de Mach périphérique de l'essai: 0,58).

E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
kt	0,474	0,516	0,494	0,468	0,444	0,408	0,364	0,306	0,254	0,198	0,116
i^0	15,0	11,8	10,6	9,8	9,2	8,8	8,25	8,1	7,9	7,7	7,7
kti	7,12	6,10	5,22	4,58	4,10	3,58	3,00	2,48	2,00	1,52	0,90
$A - \theta A'$	0,196	0,290	0,336	0,368	0,391	0,415	0,439	0,459	0,474	0,488	0,500
$kti(A - \theta A')$	1,396	1,769	1,754	1,685	1,603	1,486	1,317	1,138	0,948	0,742	0,450
$\bar{\varphi}_e$	78,92	100	99,15	95,25	90,62	84,00	74,45	64,33	53,59	41,95	25,44
$kt.B$	0,166	0,348	0,474	0,572	0,654	0,739	0,815	0,877	0,923	0,954	0,970
$\rho^{(1)}$	465	972	1325	1599	1827	2127	2328	2505	2636	2734	2799
φ_e	55,95	66,20	66,30	64,00	60,98	57,10	51,12	44,80	37,76	29,70	19,70
Γ	0,0346	0,0408	0,0410	0,0400	0,0376	0,0352	0,0316	0,0276	0,0232	0,0182	0,0118

2.4.2. Evaluation des caractéristiques globales ⁽²⁾. — Pour évaluer les caractéristiques globales C_T et C_0 nous transformerons les formules (1,33) en introduisant les grandeurs expérimentales φ et $\bar{\varphi}$. Si l'on remarque que l'angle induit δi s'exprime en fonction de ces grandeurs par la formule simple

$$(II, 11) \quad \delta i = i \left(1 - \frac{\varphi}{\bar{\varphi}} \right),$$

on voit qu'il est commode d'évaluer les vitesses induites u et v au moyen de δi ; en négligeant les puissances de $\theta = \lambda^* - \lambda$ qui donnent dans C_T et C_0 des termes d'ordre trop élevé, on a

$$u \sim -\lambda^* \delta i, \quad v = \xi \delta i,$$

d'où

$$(II, 12) \quad \begin{cases} C_T = 4p \int_0^1 (\xi - \lambda^* \delta i) \varphi d\xi, \\ C_0 = 4p \int_0^1 (\lambda + \xi \delta i) \varphi \xi d\xi. \end{cases}$$

2.4.3. Comparaison avec la méthode de Lock. — Nous avons déjà constaté (H.45) que la méthode approchée de Lock (H.36) pouvait donner des résultats très comparables à ceux des méthodes exactes de calcul de fonctionnement. Le Calculateur d'Hélices permet de se rendre compte rapidement dans quelle mesure ce fait est général. Prenons une pale de profondeur fictive constante et un montage bipale:

$$kt = u = 0,5, \quad p = 2;$$

(1) En ohms; valeurs correspondant à $\sigma = 2800 \text{ } \omega \text{ cm}$.

(2) Les formules de ce paragraphe, appliquées à l'exemple précédent, conduisent à des caractéristiques globales légèrement inférieures aux valeurs expérimentales; ce fait est sans importance ici, où nous ne nous plaçons pas au point de vue des vérifications expérimentales de la théorie, mais seulement de l'utilisation pratique du Calculateur d'Hélices; il est toutefois aisé de voir, par un calcul plus complet, que cette divergence vient de ce que l'on a adopté, au fonctionnement considéré, une valeur trop faible de λ^* , ce qui sous-estime les circulations: la méthode (1,49) indique en effet que l'hélice optimum généralisée absorbant la puissance C_0 de l'essai expérimental est telle que $\lambda^* = 0,211$.

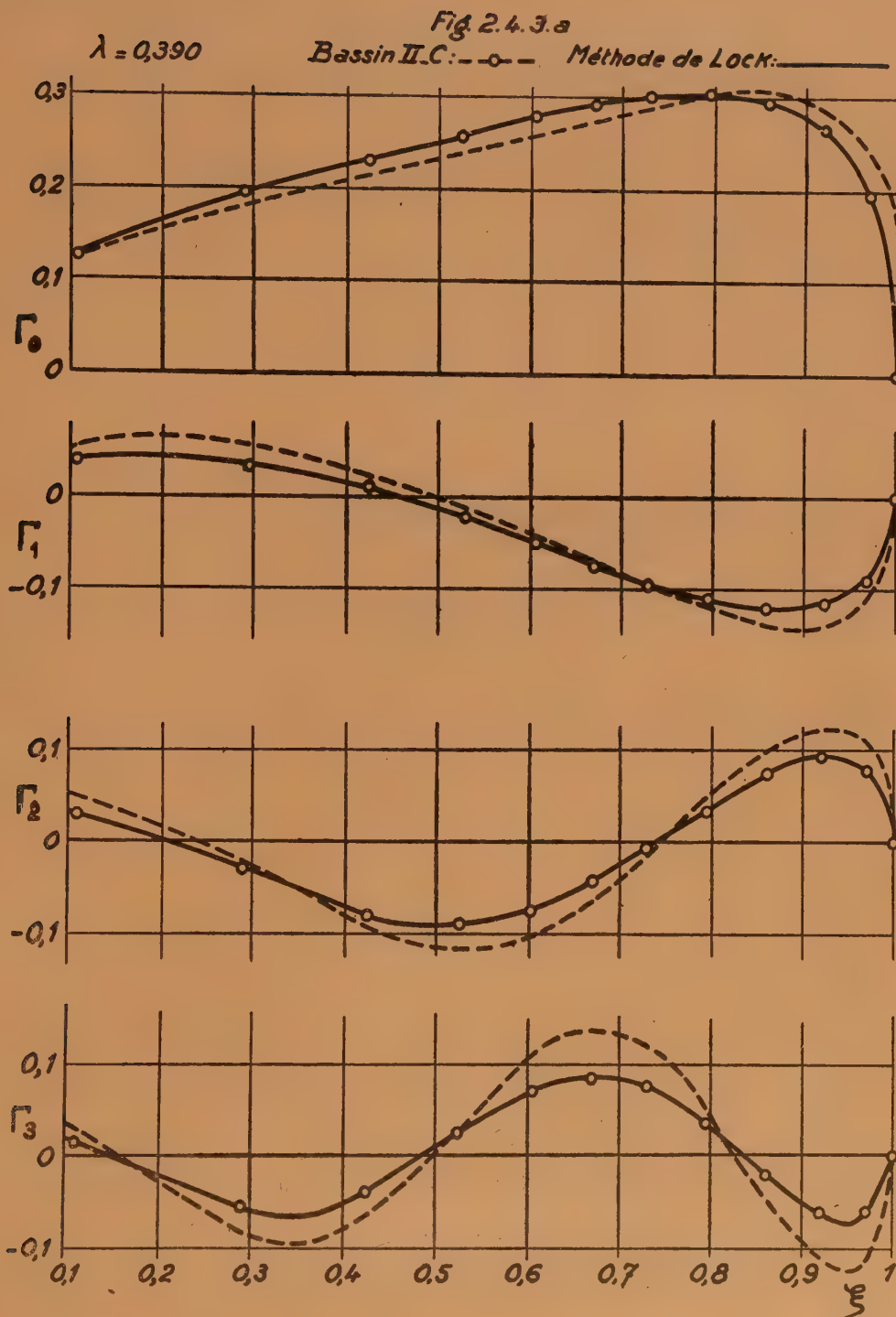
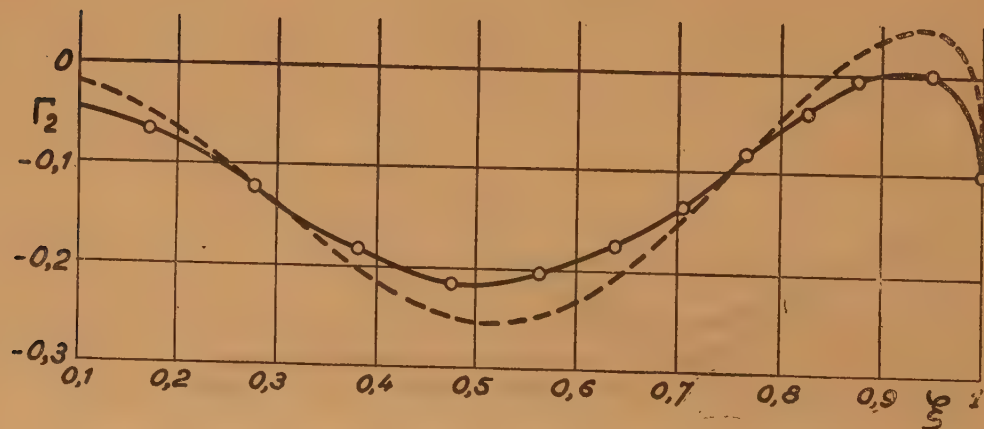
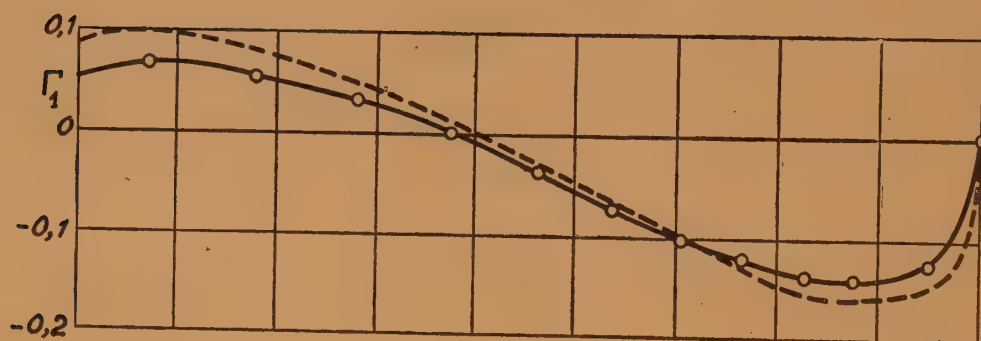
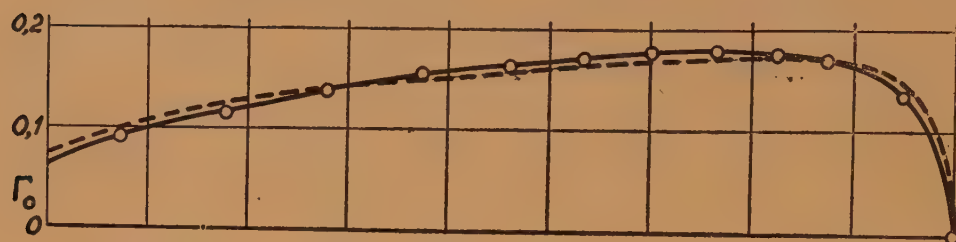


Fig. 2.4.3 b

$\lambda = 0,714$ Bassin II.D: —○— Méthode de LOCK: - - -



comme nous ne traitons pas un problème de fonctionnement réel, nous pouvons prendre constamment $\lambda^* = \lambda$ pour simplifier; dans ces conditions, la solution de Lock s'écrit, pour une bipale:

$$(II, 13) \quad \Gamma = Hi, \text{ avec } H = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}{2 + \frac{\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}{2\pi\lambda\xi}}, \quad \alpha = \frac{(\lambda^2 + \xi^2)\Gamma^*}{\xi^2}.$$

Une loi d'incidence $i(\xi)$ quelconque peut toujours être mise sous la forme

$$i(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n \cos n\pi\xi \quad (i_n = c^{(n)});$$

si $\Gamma_n(\xi)$ est la circulation due à l'incidence $\cos n\pi\xi$, on a, par suite du caractère linéaire de la théorie:

$$\Gamma(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n \Gamma_n(\xi);$$

la réponse des diverses méthodes de calcul aux harmoniques successifs permet donc de comparer les résultats de ces méthodes relatifs à un gauchissement quelconque.

Nous avons déterminé au bassin les répartitions dues aux premiers harmoniques de l'incidence (1) pour un certain nombre de valeurs de λ échelonnées dans la gamme de fonctionnement des bassins, et nous les avons comparées au calcul (II, 13) (les valeurs de α sont tirées du mémoire de Kramer déjà cité). Les figures 243 a et 243 b reproduisent les résultats respectivement pour $\lambda=0,390$ et $\lambda=0,714$; tous les autres essais donnent des résultats analogues. On voit que l'accord est bon pour les premiers harmoniques, quoique on se place dans des conditions défavorables (valeurs assez grandes de λ , nombre de pales réduit); en particulier, on observe, pour $\xi=0,7$, une coïncidence presque parfaite entre les résultats numériques des deux méthodes, ce qui explique le succès des procédés de calcul du fonctionnement à section unique couramment employés. A mesure que la loi d'incidence devient plus sinueuse, le désaccord augmente, comme on peut le prévoir, puisque la méthode de Lock suppose l'indépendance des différentes sections (la circulation ne dépend que de l'incidence locale), alors que dans la solution exacte, les interactions entre éléments de pale estompent les fluctuations d'incidence. Bien qu'il soit difficile d'explorer au bassin les incidences au delà du troisième harmonique, car le nombre d'électrodes devient insuffisant, ces exemples suffisent à confirmer que, pour la plupart des lois usuelles d'incidence, peu riches en harmoniques, la méthode de Lock doit donner d'excellents résultats, indépendamment du nombre de pales et du paramètre de fonctionnement.

2.4.4. Etude du pas variable. — Nous avons donné au chapitre I les propriétés essentielles des circulations qui s'établissent autour d'une pale infiniment peu chargée à pas variable pour une valeur donnée du paramètre de fonctionnement. On peut sans difficulté généraliser ces propriétés au cas des pales moyennement chargées; c'est ce que nous nous proposons de faire ici maintenant que le fonctionnement du Calculateur d'Hélices est acquis, en montrant comment l'appareil se prête à l'étude systématique d'une famille d'hélices à pas variable.

Le plan de construction de la pale définit une loi de gauchissement (calage des premiers axes) que nous utiliserons telle quelle et que nous désignerons par $\alpha(\xi)$; nous surlignerons les valeurs prises par les différentes fonctions pour $\xi=0,7$.

(1) En fait, on se ramène à des incidences positives sur toute l'envergure en ajoutant aux incidences sinusoidales une constante convenable, de façon à utiliser toujours l'échelle (0,100) des potentiomètres; on détermine d'abord Γ_0 correspondant à $i = 1$, puis γ_1 correspondant à $i = 1 + (1/2) \cos \pi\xi$ d'où

$$\Gamma_1 = 2(\gamma_1 - \Gamma_0),$$

etc.

Le Calculateur d'Hélices permet d'étudier un certain nombre de valeurs du pas réel λ^* ; c'est donc ce dernier que nous prenons comme paramètre principal de l'étude, et il est clair qu'une même valeur de λ^* correspond, lorsque le pas de l'hélice varie par rotation des pales autour de leurs axes respectifs, à des valeurs du fonctionnement λ qui sont fonction de la rotation des pales; cette correspondance doit être tout d'abord précisée.

2.4.4.1. Soit $\bar{\alpha}^*$ l'angle défini par l'équation

$$(II, 14) \quad \lambda^* = 0,7 \operatorname{tg} \bar{\alpha}^*,$$

et posons

$$\varepsilon^* = \bar{\alpha} - \bar{\alpha}^*;$$

La rotation ε^* effectuée à partir de la position correspondant au plan de construction amène à une loi de gauchissement $\alpha^*(\xi)$ liée à la valeur de λ^* considérée (1), et qui, d'après (II, 14), coïncide à peu près avec celle qui assure à l'hélice un couple et une traction induits nuls pour la valeur $\lambda = \lambda^*$ du fonctionnement:

$$\alpha^*(\xi) = \alpha(\xi) - \varepsilon^*.$$

Ceci étant, on désignera par ε , comme cela a été déjà fait, la rotation de la pale par rapport au gauchissement de référence $\alpha(\xi)$; le gauchissement effectif qui correspond à une rotation ε est donc:

$$\alpha(\xi) = \alpha(\xi) + \varepsilon;$$

au total, la rotation de la pale par rapport à $\alpha^*(\xi)$ est de:

$$\delta = \alpha - \alpha^* = (\alpha - \alpha) - (\alpha^* - \alpha) = \varepsilon + \varepsilon^*.$$

Nous constaterons que c'est en fonction du paramètre de rotation δ que les propriétés simples des solutions du fonctionnement à pas variable subsistent.

2.4.4.2. Calcul de $\lambda(\delta)$. — D'après la relation (I, 50), écrite par exemple:

$$\lambda^* = \frac{3\lambda + \lambda_0}{4}$$

le calcul de λ revient à celui de λ_0 :

$$\lambda_0 \sim 0,7 \operatorname{tg} \bar{\alpha} = 0,7 \operatorname{tg} (\bar{\alpha}^* + \delta);$$

en tenant compte de (II, 14), il vient (2):

$$\lambda_0 \sim \frac{\lambda^* + 0,7 \operatorname{tg} \delta}{1 - 2\lambda^* 0,7 \operatorname{tg} \delta};$$

Aux termes en δ^2 près, on a donc:

$$\lambda = \frac{4\lambda^* - \lambda_0}{3} \sim \lambda^* - \frac{0,7\delta}{3} (1 + 2\lambda^{*2}).$$

En définitive

$$(II, 15) \quad \theta = \lambda^* - \lambda \sim \delta \frac{1 + 2\lambda^{*2}}{3\sqrt{2}} = \theta_0 \delta,$$

ce qui donne donc immédiatement les valeurs de λ qu'on est susceptible de traiter par le Calculateur d'Hélices au moyen d'une seule combinaison des électrodes (λ^* donné); nous ne revenons pas ici sur l'approximation de cette méthode, qui est celle avec laquelle se vérifie la formule de Valensi.

(1) On peut employer aussi bien les notations $\alpha(\xi)$ ou $\alpha(\mu)$ puisque λ^* est constant.

(2) Nous écrivons indifféremment 0,7 ou $1/\sqrt{2}$.

2.4.4.3. Calcul de l'incidence géométrique. — Au fonctionnement λ l'incidence géométrique $i(\xi)$ est

$$i(\xi) = \alpha(\xi) - \beta_{\lambda}(\xi),$$

avec

$$\beta_{\lambda}(\xi) = \text{Arc tg } \frac{\lambda}{\xi}.$$

On a tout intérêt à introduire les angles $\beta_{\lambda^*}(\xi)$, définis de manière analogue par:

$$\beta_{\lambda^*}(\xi) = \text{Arc tg } \frac{\lambda^*}{\xi} = \text{Arc tg } \frac{1}{\mu},$$

car on peut écrire

$$\beta_{\lambda}(\xi) = \text{Arc tg } \frac{\lambda^* - \theta}{\xi} = \text{Arc tg } \frac{1 - \theta/\lambda^*}{\mu} \sim \beta_{\lambda^*}(\xi) - \frac{\theta}{\lambda^*} \frac{\mu}{1 + \mu^2},$$

valeur approchée au deuxième ordre près en θ , qui est suffisante dans les applications; portons cette valeur dans l'expression de i et posons

$$(II, 16) \quad i^*(\mu) = \alpha^*(\mu) - \beta_{\lambda^*}(\mu),$$

incidence fictive qui coïncide avec l'incidence réelle lorsque $\lambda = \lambda^*(1)$; on obtient la relation simple:

$$(II, 17) \quad i(\mu) = i^*(\mu) + C\delta,$$

avec

$$(II, 18) \quad C = 1 + \frac{\theta_0}{\lambda^*} \frac{\mu}{1 + \mu^2}.$$

On voit ici l'intérêt qu'il y a à définir pour chaque valeur de λ^* le gauchissement α^* , puisque c'est en fonction de i^* et de δ que i garde une représentation analogue à celle que l'on utilise habituellement dans la théorie de l'hélice infiniment peu chargée.

En considérant alors uniquement les grandeurs électriques qui interviennent dans la manipulation du Calculateur d'Hélices, on a d'après (II, 7') :

$$\bar{\varphi} = kt i(\mu) (A - \theta A'),$$

ou, en se limitant au premier ordre en δ :

$$\bar{\varphi} \sim kt A \left[i^*(\mu) + \delta \left(C - \theta_0 \frac{A'}{A} i^* \right) \right];$$

Il apparaît donc qu'au degré d'approximation de la théorie la solution générale de l'équation du fonctionnement à pas variable, pour une valeur donnée de λ^* se met sous la forme

$$\varphi = \varphi^* + \delta \varphi_1,$$

où φ^* et φ_1 sont les solutions correspondant respectivement aux incidences i^* et $C - \theta_0 A' i^* / A$; φ^* , φ_1 jouent ici le rôle de la distribution de base et de la distribution additionnelle usuelles.

2.4.4.4. Exemple. — Revenons à l'hélice étudiée en 2.4.1., avec toujours

$$\lambda^* = 0,198, \quad p = 2,$$

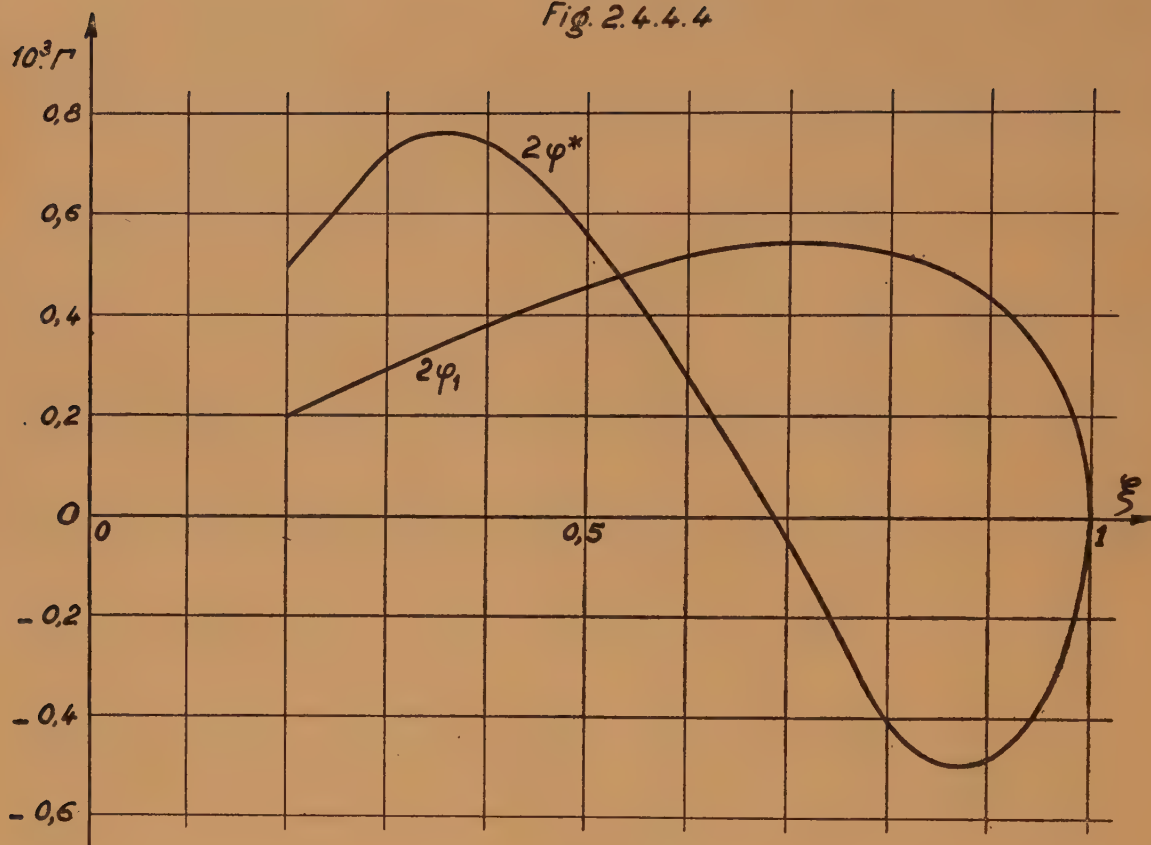
on a successivement:

$$\bar{\alpha} = 23^{\circ},5, \quad \bar{\alpha}^* = 15^{\circ},8; \quad \text{d'où } \varepsilon^* = 7^{\circ},7$$

$$\theta_0 = \frac{1 + 2\lambda^{*2}}{3\sqrt{2}} = 0,252; \quad C = 1 + 0,252 \frac{\xi}{\lambda^{*2} + \xi^2}.$$

(I) D'après (II,14), on a $i^* = 0$.

Fig. 2.4.4.4



La figure 2.4.4.4. donne les deux effets de circulation, $2\varphi^*$ et $2\varphi_1$ (ce dernier rapporté à une rotation $\delta=1^\circ$) ; ces deux fonctions résument tous les renseignements que peut fournir le bassin électrique pour $\lambda^*=0,198$ au sujet du comportement aérodynamique de la bipale considérée : au fonctionnement $\lambda=\lambda^*-\theta_0\delta$, la répartition de circulation est

$$\Gamma = 2\varphi^* + 2\varphi_1\delta,$$

On vérifie par exemple que, pour $\delta=\varepsilon^*=7^\circ 7'$, cette formule redonne la circulation obtenue en 2.4.1., avec une précision de l'ordre de 1 %.

2.5. Les bassins à profondeur variable utilisés dans le Calculateur d'Hélices pour représenter les potentiels hélicoïdaux permettent également de se rendre compte de l'existence et d'assurer éventuellement le calcul des fonctions particulières introduites au chapitre I, et désignées par G, N, f. En effet, pour réaliser dans le bassin des potentiels présentant une ligne hélicoïdale de singularités logarithmiques, il suffit (1) de matérialiser et de porter à un potentiel électrique convenable une surface équipotentielle du champ cherché, suffisamment rapprochée de la singularité pour que le calcul puisse en être fait, indépendamment des autres conditions aux limites imposées, à partir du comportement asymptotique connu du potentiel au voisinage de la singularité. D'après 1.1.7., les singularités qui nous intéressent ici sont celles du champ électrostatique d'hélices uniformément chargées ; les surfaces

(1) Pour la réalisation des singularités par analogies électriques, voir par exemple :
L. MALAVARD : Comptes rendus, 206, 1938, p. 39.

J. PÉRÈS et L. MALAVARD : Journal de Mathématiques, XX, 4, 1941.

équipotentiellles de ce champ sont, à la limite, les parois latérales de tubes hélicoïdaux très déliés entourant les hélices singulières; un calcul aisé montre que l'équation d'un tel tube, de rayon ε petit, peut s'écrire:

$$\frac{(\xi - \xi_0)^2}{\varepsilon^2} + \frac{\lambda^2 \xi_0^2}{\varepsilon^2 (\lambda^2 + \xi_0^2)} (\zeta - \zeta_0)^2 = 1,$$

ξ_0 , ζ_0 désignant l'hélice génératrice; cette équation représente, dans le plan auxiliaire (ξ, ζ) , une courbe d'allure elliptique, facile à construire, puis, dans les coordonnées (μ, ζ, Z) du bassin, un cylindre de section quasi-elliptique définissant l'image rhéoelectrique de la singularité. Le choix de ε conditionne les dimensions de cette image qui, tout en étant suffisantes pour se prêter à un modelage correct, doivent rester assez faibles pour que soit vérifiée l'hypothèse d'indépendance entre la forme même de la singularité et les propriétés des fonctions cherchées dans le reste du champ.

Une telle électrode étant placée au point (μ_0, ζ_0) du bassin, et portée au potentiel $\log \varepsilon$ (1), il est clair que le potentiel électrique dans le bassin déterminera:

- a) en portant toutes les frontières au potentiel zéro, la fonction de Green G (1.1.9.);
- b) en rendant toutes les frontières isolantes et en fermant le circuit au moyen d'une seconde électrode représentant la singularité sur l'axe du bassin, la fonction de Neumann N (1.1.9.);
- c) la fonction f (1.2.7.) enfin, en rendant isolante la partie de l'axe $\zeta^* = 0$ figurative de la pale, le reste des frontières étant au potentiel zéro.

(1) C'est-à-dire, moyennant un changement d'échelle convenable, au potentiel 100 de notre échelle potentiométrique.

3. CORRECTIONS DE PAROIS POTENTIELS HÉLICOIDaux GÉNÉRALISÉS.

Nous avons montré au chapitre 2 comment la plupart des problèmes de l'hélice simple pouvaient être ramenés, par la considération des potentiels hélicoïdaux attachés au fonctionnement aérodynamique des pales, à une intégration mécanique au moyen du Calculateur d'Hélices. Un certain nombre de questions analogues, relatives au fonctionnement de l'hélice compte tenu des interactions avec d'autres corps (effets de parois dans les essais de soufflerie, influence du moyeu et du fuseau-moteur, etc.), peuvent de même recevoir une solution théorique simple par la considération de potentiels ne présentant plus une symétrie hélicoïdale complète; l'analogie entre le potentiel électrique du bassin et le potentiel hydrodynamique ne peut donc, elle non plus, être complète, mais on peut néanmoins l'utiliser dans un procédé d'approximations successives très rapidement convergent. Nous montrerons enfin qu'une généralisation de ces méthodes au cas des ventilateurs ou soufflantes simples est possible.

3.1. PROBLÈME GÉNÉRAL DES CORRECTIONS DE PAROIS.

On effectue rarement de corrections de parois dans les essais d'hélices en soufflerie, et on s'est assez peu préoccupé de les évaluer exactement, car il est facile de constater que ces corrections sont à peu près illusoires toutes les fois où l'hélice est essayée devant un fuseau non cylindrique, ce qui est le cas la plupart du temps: les interactions entre le propulseur et le fuseau ont un ordre de grandeur au moins égal, sinon supérieur, à celui des interactions avec les parois de la veine, et sont pratiquement impossibles à évaluer. Mais la vérification des calculs théoriques exige que l'on se place en soufflerie dans des conditions expérimentales aussi voisines que possible des conditions du calcul, et on a été conduit à effectuer des essais d'hélices en présence d'un fuseau donnant de faibles interactions aérodynamiques avec l'hélice; c'est l'origine des différents bancs d'essais du type « minimum Body », dans lesquels l'écoulement qui attaque les pales reproduit très sensiblement l'écoulement uniforme supposé par la théorie. La question des corrections de parois ne présente donc pratiquement d'intérêt que lorsque l'essai est effectué dans ces conditions, et il importe alors de savoir évaluer quelles modifications la limitation de la veine d'expérience et la présence du fuseau central cylindrique introduisent dans les caractéristiques locales et globales de l'hélice.

3.1.1. Dans tout ce qui suit, nous supposerons que la section droite de la veine fluide est formée d'une couronne comprise entre deux cercles, l'un de rayon $\xi_0 < 1$ figurant la paroi du fuseau central, l'autre de rayon $\xi_1 > 1$ représentant la paroi de la soufflerie (1); la veine est supposée cylindrique sur une assez grande longueur (quelques diamètres de l'hélice) de part et d'autre du plan de rotation des pales, c'est-à-dire pratiquement de l'infini amont à l'infini aval; d'autre part, nous nous limitons au cas principal où la soufflerie est à section circulaire et à veine guidée.

3.1.2. Les conditions aux limites imposées au potentiel des vitesses induites par la limitation de la veine doivent traduire le fait que, d'une part, les vitesses radiales dérivant de ce potentiel s'annulent au contact des parois, et que, d'autre part, le souffle des vitesses axiales induites à l'aval de l'hélice, est compatible avec la conservation du débit de la veine de l'infini amont à l'infini aval. On peut

(1) Le rayon de l'hélice est toujours pris pour unité.

prévoir immédiatement que la condition concernant les vitesses radiales sera peu importante et n'amènera pas, en général, de corrections appréciables puisque ces vitesses sont faibles (rappelons que la théorie convient de ne pas tenir compte de leur influence sur l'écoulement autour des pales dans le cas de l'hélice isolée); par contre, la condition de continuité du débit prend une certaine importance dès que l'hélice est chargée.

Soit $F(\xi, \theta, z)$ le potentiel de l'écoulement additionnel dû aux tourbillons libres prolongés indéfiniment vers l'amont; la condition imposée par la limitation de la veine est:

$$(III, 1) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_{\xi_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_{\xi_1} = 0;$$

elle traduit le fait que l'écoulement est tangent aux parois. Par ailleurs, la conservation du débit entraîne que le souffle axial total soit nul:

$$(III, 2) \quad \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi d\xi \int_0^{2\pi} v(\xi, \theta, z) d\theta = 0, \quad v = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

3.1.3. Potentiel d'un échappement multipale en présence des parois. — Considérons un tourbillon multipale de circulation $\delta\Gamma$, tracé sur un cylindre de rayon ρ coaxial à la veine; d'après les formules (I,18) modifiées pour tenir compte de l'absence de tourbillon-moyeu dans le cas actuel, le potentiel des vitesses d'un tel tourbillon serait, s'il n'y avait pas les parois:

$$\begin{aligned} \delta F_0 &= \rho \frac{\delta\Gamma}{2\pi\lambda^*} \left[z + 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} K'_{np} \left(\frac{np\rho}{\lambda^*} \right) I_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda^*} \right) \sin np\xi^* \right], \quad \xi < \rho \\ \delta F_0 &= \rho \frac{\delta\Gamma}{2\pi\lambda^*} \left[\lambda^* \theta + 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} K_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda^*} \right) I'_{np} \left(\frac{np\rho}{\lambda^*} \right) \sin np\xi^* \right], \quad \xi > \rho. \end{aligned}$$

Pour satisfaire à la condition (III,1), ajoutons à δF_0 un potentiel correcteur δF_1 régulier dans la couronne $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$, de la forme:

$$(III, 3) \quad \delta F_1 = -\rho \frac{\delta\Gamma}{\pi\lambda^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_{np} K'_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda^*} \right) + \beta_{np} I_{np} \left(\frac{np\xi}{\lambda^*} \right) \right] \sin np\xi^*;$$

les deux relations:

$$\left(\frac{\partial \delta F_0}{\partial \xi} \right)_{\xi_0} = - \left(\frac{\partial \delta F_1}{\partial \xi} \right)_{\xi_0}, \quad \left(\frac{\partial \delta F_0}{\partial \xi} \right)_{\xi_1} = - \left(\frac{\partial \delta F_1}{\partial \xi} \right)_{\xi_1}$$

donnent pour déterminer α_{np} et β_{np} le système:

$$\begin{cases} \alpha_{np} K'_{np} \left(\frac{np\xi_0}{\lambda^*} \right) + \beta_{np} I'_{np} \left(\frac{np\xi_0}{\lambda^*} \right) = K'_{np} \left(\frac{np\rho}{\lambda^*} \right) I'_{np} \left(\frac{np\xi_0}{\lambda^*} \right), \\ \alpha_{np} K'_{np} \left(\frac{np\xi_1}{\lambda^*} \right) + \beta_{np} I'_{np} \left(\frac{np\xi_1}{\lambda^*} \right) = K'_{np} \left(\frac{np\xi_1}{\lambda^*} \right) I'_{np} \left(\frac{np\rho}{\lambda^*} \right), \end{cases}$$

qui est aisément résoluble. Remarquons d'ailleurs que les développements contenus dans δF_1 satisfont également à (III,2), puisqu'ils n'induisent que des vitesses périodiques de flux moyen nul. Le deuxième potentiel correcteur δF_2 qu'il convient d'ajouter à δF_0 pour obtenir le potentiel total δF du tourbillon en présence des parois ne dépend plus de ξ , et satisfait donc à l'équation:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \delta F_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \delta F_2}{\partial z^2} = 0,$$

d'où résulte

$$\frac{\partial^2 \delta F_2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \delta F_2}{\partial z^2} = 0;$$

on a par conséquent:

$$\delta F_2 = A \theta + Bz.$$

La relation (III,2) peut s'écrire:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi (\overline{\delta v_0} + \overline{\delta v_2}) d\xi = 0,$$

$\overline{\delta v_0}$ et $\overline{\delta v_2}$ désignant les valeurs moyennes des souffles axiaux dérivant de δF_0 et de δF_2 ; ces vitesses sont respectivement égales aux coefficients de z dans les termes linéaires de δF_0 et δF_2 , et par conséquent la constante B est déterminée par:

$$B \int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi d\xi = -p \frac{\partial \Gamma}{2\pi \lambda^*} \int_{\xi_0}^{\rho} \xi d\xi,$$

soit:

$$B = -\frac{p}{2\pi \lambda^*} \frac{\rho^2 - \xi_0^2}{\xi_1^2 - \xi_0^2}.$$

La constante A reste arbitraire si on ne considère que les conditions (III,1) et (III,2), mais la régularité de δF_2 à l'intérieur de la veine entraîne nécessairement que $A = 0$. On a donc en définitive:

$$(III, 5) \quad \delta F = \delta F_0 + \delta F_1 + \delta F_2 = \begin{cases} \frac{p}{2\pi \lambda^*} \left[1 - \frac{\rho^2 - \xi_0^2}{\xi_1^2 - \xi_0^2} \right] z + f_i(\xi, \zeta^*; \rho), & \xi < \rho \\ -\frac{p}{2\pi \lambda^*} \left[\frac{\rho^2 - \xi_0^2}{\xi_1^2 - \xi_0^2} z - \lambda^* \theta \right] + f_e(\xi, \zeta^*; \rho), & \xi > \rho, \end{cases}$$

f_i et f_e désignant les termes périodiques de $\delta F_0 + \delta F_1$.

3.1.3.1. Cas particulier. — Supposons que l'échappement tourbillonnaire se rapproche de la paroi du moyeu: $\rho \rightarrow \xi_0$; il est aisé de constater que, d'une part, dans δF_1 ,

$$\alpha_{np} \rightarrow \Gamma_{np} \left(\frac{np \xi_0}{\lambda^*} \right), \quad \beta_{np} \rightarrow 0,$$

et que, d'autre part:

$$\delta F_2 \rightarrow 0,$$

si bien que:

$$\delta F \rightarrow \frac{p}{2\pi} \theta.$$

L'effet d'image sur le cylindre central est donc tel que l'émission tourbillonnaire disparaît et que le moyeu induit le même champ de vitesse qu'un tourbillon lié rectiligne porté par l'axe de la veine; si nous considérons un instant que le tourbillon hélicoïdal précédent schématise l'émission voisine du pied de pale d'une hélice dont on suppose pour simplifier la distribution de circulation constante en envergure, nous voyons que le système tourbillonnaire admet lorsque $\rho \rightarrow \xi_0$ la forme limite constituée par le tourbillon marginal et le tourbillon-moyeu opposé. On voit de même que dans le cas le plus général où la circulation est variable le long de l'envergure, elle peut garder au pied de pale une valeur $\Gamma(\xi_0) = \Gamma_0$ non nulle par effet d'image sur le corps central (par exemple lorsque le profil

d'implanture a une caractéristique aérodynamique $k \neq 0$); le moyeu se comporte alors comme un tourbillon lié de potentiel

$$-\frac{\rho \Gamma_0}{2\pi} \theta.$$

3.1.3.2. Cas particulier. — Supposons de même que l'échappement tourbillonnaire soit voisin de la paroi extérieure de la veine: $\rho \rightarrow \xi_1$; on a immédiatement:

$$\alpha_{np} \rightarrow 0, \quad \beta_{np} \rightarrow K'_{np} \left(\frac{np \xi_1}{\lambda^*} \right), \quad \delta F_2 \rightarrow -\frac{\rho \delta \Gamma}{2\pi \lambda^*} z,$$

d'où:

$$\delta F \rightarrow 0.$$

On vérifie ainsi que par effet d'image, les émissions marginales disparaissent toutes les fois que la circulation peut rester non nulle en bout de pale (c'est-à-dire lorsque la corde marginale est elle-même non nulle et que le jeu entre l'extrémité des pales et la paroi extérieure est nul).

Par combinaison de ces deux cas particuliers, on retrouve le schéma classique qui sert au calcul des ventilateurs à distribution constante de la circulation; le système tourbillonnaire se réduit au tourbillon-moyeu, dont la circulation est opposée à celle de la roue.

3.1.4. Il est clair que les vitesses additionnelles dues à l'échappement multipale sont, sur les pales, égales à la moitié de celles obtenues en calculant les dérivées de δF pour $\zeta^* = 0$, ce qui justifie l'emploi de ce potentiel par la suite. Le terme δF_2 se présente comme caractéristique d'un courant de retour uniforme dans la soufflerie; quand on remonte de l'infini aval, ce contre-souffle diminue progressivement d'intensité; sa vitesse est réduite de moitié quand on passe dans le plan de rotation des pales, et elle s'annule à quelque distance en amont de l'hélice, de même que les vitesses axiales induites qui constituent le souffle proprement dit. Le calcul suppose évidemment que le support du tourbillon reste une hélice géométrique, et, dans le cas général du paragraphe suivant, que les surfaces tourbillonnaires restent assimilables à des hélicoïdes; les vitesses de contre-souffle tendent d'ailleurs à diminuer l'auto-déformation de ces nappes et à diminuer la différence entre λ^* et le paramètre de fonctionnement.

3.1.5. Forme générale du potentiel des tourbillons libres. — Considérons alors un système tourbillonnaire multipale complet s'échappant de la partie libre des pales $\xi_0 \leq \rho \leq 1$; en vue des applications ultérieures, nous admettons que la circulation Γ n'est pas nécessairement nulle sur le moyeu:

$$\Gamma(\xi_0) = \Gamma_0 \neq 0.$$

Dans ces conditions, le potentiel total F des tourbillons libres aura, loin à l'aval du plan de rotation, l'expression:

$$F(\xi, \theta, z) = \begin{cases} -\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\partial F}{\partial \Gamma} d\Gamma - \int_{\xi}^1 \frac{\partial F}{\partial \Gamma} d\Gamma - \frac{\rho \Gamma_0}{2\pi} \theta, & \xi < 1, \\ -\int_{\xi_0}^1 \frac{\partial F}{\partial \Gamma} d\Gamma - \frac{\rho \Gamma_0}{2\pi} \theta, & \xi > 1, \end{cases}$$

dans laquelle le dernier terme est le potentiel du tourbillon-moyeu. Un calcul aisé à partir des formules (III,5) montre que F se compose de deux termes de nature différente, que nous écrivons:

$$(III, 6) \quad F(\xi, \theta, z) = -\frac{\rho \bar{\Gamma}}{2\pi \lambda^*} z + \varphi(\xi, \zeta^*).$$

Le premier représente le contre-souffle global de l'échappement tourbillonnaire; il ne dépend que de la valeur moyenne $\bar{\Gamma}$ de la circulation dans la veine:

$$(III, 7) \quad \bar{\Gamma} = \frac{2}{\xi_1^2 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \rho \Gamma(\rho) d\rho = \frac{2}{\xi_1^2 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \rho \Gamma(\rho) d\rho;$$

le deuxième terme est une fonction $\varphi(\xi, \xi^*)$ présentant toutes les propriétés des potentiels hélicoïdaux utilisés dans les chapitres précédents (dans le plan de l'hélice, on a $z = 0$, donc $F = \varphi$), avec en plus les conditions aux parois:

$$(III, 8) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi_0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi_1} = 0.$$

3.1.6. Vitesses et angle induits. — Si nous désignons comme d'ordinaire par u, v les vitesses qui dérivent sur les pales du potentiel hélicoïdal φ , puis par U, V celles qui dérivent de F , on a les relations (1):

$$U = u, \quad V = v - \frac{\rho \bar{\Gamma}}{4\pi \lambda^*}, \quad \frac{u}{v} = -\frac{\lambda^*}{\xi},$$

d'où:

$$(III, 9) \quad \lambda^* V + \xi U + \frac{\rho \bar{\Gamma}}{4\pi} = 0.$$

L'angle induit se déduit alors de la formule générale (I,20); en considérant comme du second ordre les termes en $(\lambda^* - \lambda)u$, et en négligeant au dénominateur le terme $\rho \bar{\Gamma}/4\pi$ devant $\lambda^2 + \xi^2$, on obtient:

$$(III, 10) \quad \delta i \sim \frac{v}{\xi} - \frac{\rho \bar{\Gamma}}{4\pi \lambda^* \lambda^2 + \xi^2};$$

d'où l'équation du fonctionnement aérodynamique des pales:

$$(III, 11) \quad \frac{\Gamma}{2} = \varphi(\xi) = \frac{k i \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}}{2} \left[i(\xi) - \frac{v}{\xi} + \frac{\rho \bar{\Gamma}}{4\pi \lambda^* \lambda^2 + \xi^2} \right].$$

3.2. SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DES CORRECTIONS DE PAROIS (2)

Le calcul du potentiel hélicoïdal généralisé F attaché au fonctionnement de l'hélice en présence des parois est équivalent à celui du potentiel hélicoïdal adjoint φ puisque la différence $F - \varphi$ a l'expression simple (III,6) en fonction des singularités de φ dans la veine; la détermination de φ par le procédé d'analogies électriques peut alors s'effectuer en modifiant légèrement le procédé expérimental:

a) d'une part, pour tenir compte des conditions (III,8); les parois du capotage et de la veine sont matérialisées par des bandes circulaires isolantes placées dans le bassin et ayant pour rayons les valeurs r_0 et r_1 homologues respectivement de ξ_0 et ξ_1 dans la transformation (II,3);

b) d'autre part, pour tenir compte de l'expression (III,10) de l'angle induit. Le terme provenant du contre-souffle contient la valeur $\bar{\Gamma}$ initialement inconnue; on peut, à partir de la répartition de potentiel φ_0 obtenue sans tenir compte de ce terme, avoir une première évaluation Γ_0 de

(1) La vitesse V de la veine n'intervenant dans les calculs que sous la forme adimensionnelle λ , on peut adopter sans risque de confusion la notation V pour la vitesse axiale induite (rapportée à ωR).

(2) R. SIESTRUCK: Comptes rendus, 221, 1945, p. 286.

Γ et introduire cette valeur dans l'angle induit de contre-souffle, que l'on considère alors comme une variation connue d'incidence; ce procédé d'approximations successives converge très rapidement, et on peut en général se borner à déterminer la répartition φ_1 de deuxième approximation.

3.2.1. Les montages prévus à la partie (a) précédente se simplifient, comme nous l'avions annoncé au N° 3.1.2., par suite du peu d'importance des vitesses radiales induites; la démonstration expérimentale de ce fait nous a été fournie par les essais préliminaires effectués sur le Calculateur d'Hélices N° 1: il suffit de déplacer dans le bassin en cours de fonctionnement un contour circulaire isolant (ou même métallique, porté au potentiel zéro) figurant l'image de la paroi de la soufflerie, pour se persuader que la limitation de la veine ne modifie pas de façon appréciable le résultat d'un calcul de répartition (1).

On a ainsi pu aboutir, dans la construction des bassins II, à des dimensions économiques et peu encombrantes: tout calcul d'Hélice s'y fait en présence de parois extérieures très rapprochées, correspondant à une veine guidée. La bande de plexiglas limitant circulairement les bassins a, dans le plan de l'hélice réelle, un rayon vecteur relatif ξ_1 , qui varie, suivant le nombre d'électrodes utilisées, entre les limites

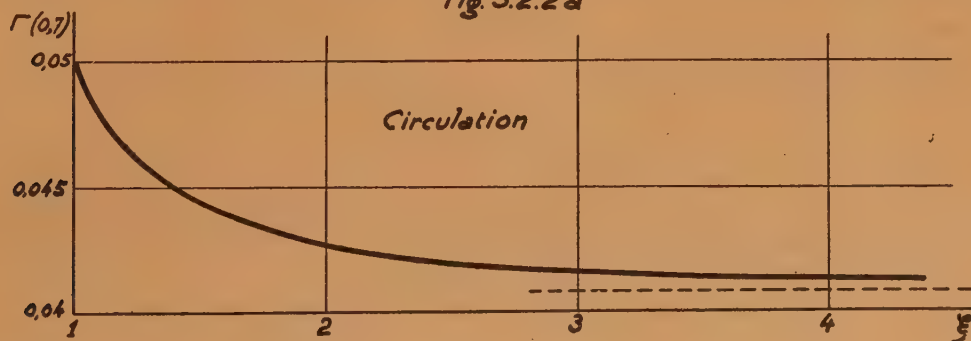
II.A	1,03	$\leq \xi_1 \leq$	1,40
II.B	1,09		1,54
II.C	1,10		1,87
II.D	1,60		2,66

Lorsqu'on utilise parallèlement II.A et II.B pour $\lambda^* = 0,25$, par exemple, on compare des essais dans des veines très différentes (respectivement $\xi_1 = 1,40$ et $1,09$) sans que les résultats en soient affectés. En résumé, *il n'y a pas lieu, dans un problème de corrections de parois, de compliquer le montage en utilisant effectivement une paroi dans le bassin.*

Les mêmes remarques s'appliquent en partie au cas d'une paroi intérieure (capotage central cylindrique). Dans les montages correspondant aux faibles valeurs de λ^* , la première électrode représente un point de la pale notablement extérieur à la casserole d'hélice: la réalisation dans le bassin de la paroi schématisant ce capotage serait délicate, et visiblement sans répercussion sur les circulations; dans le cas des grandes valeurs de λ^* , le corps central peut être figuré dans le bassin par un cylindre de dimensions non négligeables, qu'on réalise sans difficulté en coulant de la paraffine jusqu'au rayon r_0 désiré; mais en fait, il n'y a véritablement effet de paroi que lorsque, par image, la circulation reste finie pour $\xi = \xi_0$ (2) (cas des pales sortant toutes formées du capotage central).

3.2.2. Il résulte de ces remarques que les corrections de parois sont entièrement dues au contre-souffle, et qu'on peut les déterminer sans rien changer au montage du Calculateur d'Hélices. A titre d'exemple, nous avons étudié le comportement, en veine guidée, de la pale déjà considérée en 2.4.1.,

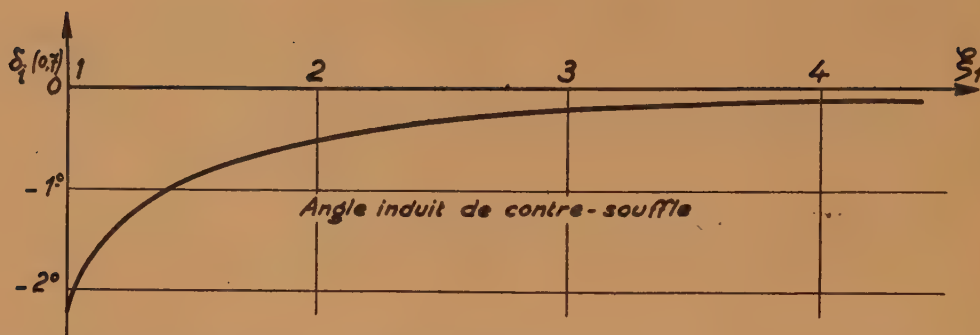
Fig. 3.2.2 a



(1) L'effet peut devenir sensible quand le fonctionnement est très grand et le nombre de pales faible; il n'est jamais observable dans nos bassins sous le seul effet de leurs parois propres.

(2) En particulier, le montage de soufflerie « minimum Body », pour des pales à pieds cylindriques ($\Gamma_0 = 0$), peut être vraiment considéré comme annulant toute interaction aérodynamique entre le corps central et les pales.

Fig. 3.2.2 b

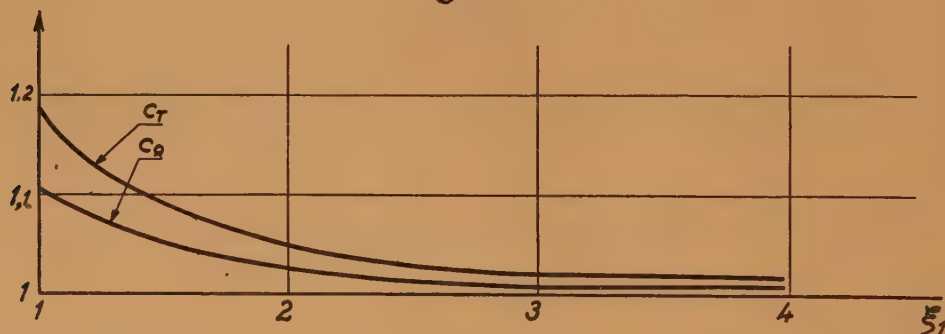


dont la répartition de circulation en fluide illimité est connue; les cas traités sont $\xi_1 = 1; 1,5; 2; 2,86$ (1), avec toujours $\lambda^* = 0,198$, $\lambda = 0,164$.

Les circulations croissent sensiblement quand ξ_1 décroît, et la correction devient importante pour $\xi_1 \sim 1$; nous reproduisons l'évolution de la circulation en fonction de ξ_1 à l'abscisse moyenne $\xi = 0,7$ seulement, pour simplifier, ainsi que la variation de l'angle induit par le contre-souffle (fig. 322 a et b). Dans tous les cas, sauf pour $\xi_1 = 1$, une seule expérience a été suffisante pour que l'on passe de la répartition en fluide indéfini à la répartition en présence du contre-souffle; les variations d'incidence engendrées par ce dernier conduisent à des retouches légères des potentiels d'alimentation qui s'effectuent très rapidement.

3.2.2.1. La figure 3.2.2.1.a. représente, dans les conditions de l'étude précédente, l'évolution en fonction de ξ_1 des coefficients globaux C'_T et C'_Q rapportés à leurs valeurs respectives en milieu indéfini; on voit que pour $\xi_1 = 2$, limite habituellement admise pour les essais en veine fermée, les corrections atteignent respectivement 5 % et 2,5 %.

Fig. 3.2.2.1 a



Il est aisé de vérifier que ces valeurs concordent bien avec celles données par les méthodes usuelles (2); ces dernières s'appuient sur un schéma simplifié du sillage, analogue à celui de la théorie de Froude et par conséquent fort différent du nôtre qui permet d'analyser le fonctionnement aérodynamique de la pale en envergure; mais les résultats globaux doivent différer assez peu, au moins pour les faibles valeurs de l'argument de similitude. On sait que les corrections s'effectuent, dans ces méthodes, en déterminant, pour chaque valeur de λ expérimentée, le fonctionnement λ'

(1) Correspondant aux conditions de l'essai de soufflerie; cf. Helmbold, loc. cit.

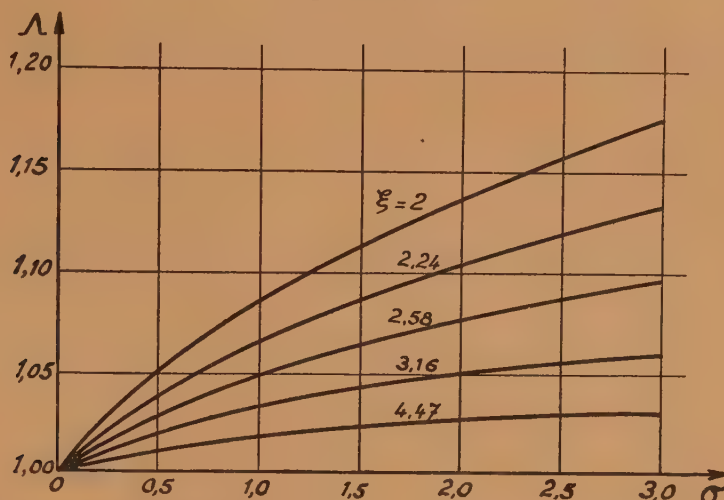
(2) WOOD et HARRIS, Theory of an Airscrew Working in a Wind Channel; A.R.C., R.M. 602.

CLAUERT, Elements of Airfoil and Airscrew Theory.

DURAND, Aerodynamic Theory, t. IV.

auquel l'hélice prend, en fluide indéfini, les mêmes coefficients C_T et C_0 que dans l'essai de soufflerie; par exemple, l'abaque que reproduit la figure 3.2.2.1.b. donne, à partir d'une abscisse $\sigma = C_T / 2\pi\lambda^2$, l'ordonnée $\Lambda = \lambda/\lambda'$ sur la courbe correspondant au ξ_1 de l'essai.

Fig. 3.2.2.1b



L'exemple que nous avons décrit est tel que: $\lambda = 0,164$, $C_T \sim 0,065$ en fluide illimité; d'où: $\sigma = 0,370$. Pour $\xi_1 = 2$, on lit alors $\Lambda = 1,041$.

Or, d'après nos courbes 3.2.2.1., nous devons mesurer dans cette veine un coefficient de traction égal à:

$$C_T \cdot 1,047 = 0,0681, \quad \Delta C_T = 0,0031;$$

étant donné que l'on a, en admettant une caractéristique de traction linéaire entre la valeur actuelle de λ et la traction nulle λ_0 :

$$\frac{dC_T}{d\lambda} \sim \frac{C_T}{\lambda - \lambda_0} = -0,49,$$

on voit que le fonctionnement λ' auquel l'hélice fournit, en fluide illimité, la traction $C_T + \Delta C_T$ doit être:

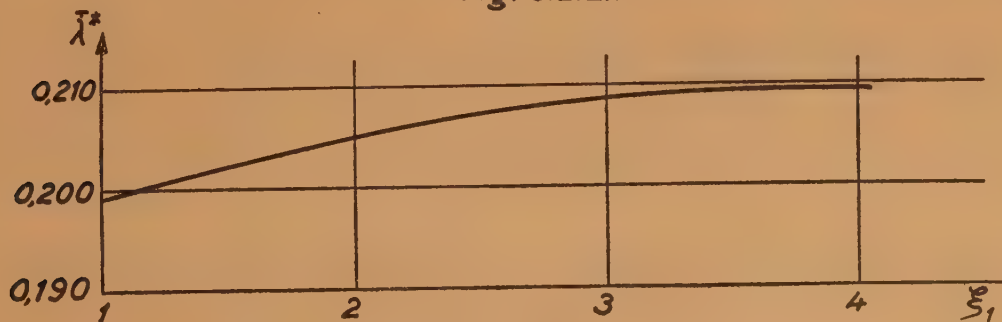
$$\lambda' = \lambda + \Delta C_T \cdot \frac{d\lambda}{dC_T} = 0,1607;$$

par suite,

$$\Lambda = \lambda/\lambda' = 1,040.$$

3.2.2.2. Nous avons gardé, dans les calculs qui viennent d'être exposés, une valeur λ^* égale à

Fig. 3.2.2.2.



0,198, indépendante de ξ_1 ; mais il est clair que le contre-souffle de la veine guidée diminue le pas réel des tourbillons. La figure 3.2.2.2. donne par exemple l'évolution en fonction de ξ_1 de la quantité

$$\tilde{\lambda}^* = \left(\xi \frac{\lambda + V}{\xi + U} \right) \xi = 0,7$$

qu'on peut appeler pas réel moyen; on constate que λ^* est, quel que soit ξ_1 , supérieur à la valeur adoptée initialement $\lambda^* = 0,198$, dont nous avons déjà signalé qu'elle était trop faible (2.4.2.). Toutefois, la variation de λ^* avec ξ_1 n'est qu'un effet du second ordre par rapport à la correction d'incidence due au contre-souffle, et ne modifie pratiquement rien à notre discussion.

3.3. GÉNÉRALISATION AUX MACHINES AXIALES SIMPLES

L'intérêt principal des potentiels hélicoïdaux généralisés (3.2.) réside dans leur application directe au problème du fonctionnement des machines axiales simples, ventilateurs ou soufflantes sans distributeur dans une veine cylindrique; ils permettent un premier pas vers la théorie générale des machines axiales composées.

On sait que les calculs d'adaptation des ventilateurs se font d'ordinaire en supposant que la distribution de circulation le long des pales est constante; cette répartition, qui, du fait de l'absence de tourbillons libres (1), n'induit aucune vitesse axiale, a été considérée au N° 3.1.3.2.: elle satisfait à la condition élémentaire de constance du débit fluide dans la veine de part et d'autre de l'hélice; mais il est évident qu'à tout régime autre que celui d'adaptation, la répartition des circulations est variable le long des pales, et qu'il faut considérer un système tourbillonnaire libre auquel est attaché un potentiel hélicoïdal généralisé du type (III,6) (2). Ces répartitions de circulation se déterminent sans difficulté au moyen du Calculateur d'Hélices, la limitation du bassin par les parois isolantes figuratives des frontières extérieure et intérieure de la veine étant cette fois nécessaire; nous nous bornerons, dans ce qui suit, à généraliser aux machines axiales quelques propriétés classiques de l'hélice, et pour plus de simplicité, nous reviendrons à la conception des pales infiniment peu chargées, c'est-à-dire de l'égalité entre λ et λ^* , bien qu'il n'y ait là rien d'indispensable.

3.3.1. Relations de symétrie et de réciprocité. — Considérons deux potentiels hélicoïdaux φ et Φ adjoints aux potentiels induits de deux machines axiales caractérisées par les quantités p , λ et les données respectives k , t , i , et K , T , I ; ces potentiels diffèrent de ceux de l'hélice par la limitation de leur champ de définition à la couronne cylindrique $\xi_0 \leq \xi \leq 1$, par les conditions aux limites auxiliaires telles que (III,8):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi_0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_1 = 0,$$

et par la forme particulière de la relation du fonctionnement:

$$(III, 11) \quad \zeta = 0, \quad 2 \frac{\varphi}{\Phi} = \frac{kt}{KT} \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} \left[\frac{i}{1} - \frac{1}{2\lambda \sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} \frac{dn}{d\Phi} + \frac{p}{2\pi\lambda} \frac{\bar{\varphi}}{\Phi} \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2} \right];$$

il est donc clair que si l'on applique à φ et Φ la formule de Green comme au N° 1.1.10, les surfaces latérales d'intégration n'apportent aucune contribution nouvelle, et on a

$$\int_{\xi_0}^1 \left(\varphi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\varphi}{dn} \right) \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} d\xi = 0,$$

(1) Nous admettons dans tout ce qui suit que le jeu entre les extrémités de pales et la paroi de la veine est nul, c'est-à-dire que l'on a $\xi_1 = 1$; on ne tient donc pas compte des échappements marginaux dus au jeu réel et aux couches limites des parois.

(2) R. SIESTRUNCK, Comptes rendus, 221, 1945, pp. 342-344.

ou, en éliminant les dérivées normales au moyen de (III, 11) :

$$2 \int \varphi \Phi \left(\frac{1}{kt} - \frac{1}{KT} \right) \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} d\xi + \int (\lambda^2 + \xi^2) (\Phi i - \varphi I) d\xi - \frac{p}{2\pi\lambda} \left(\bar{\Phi} \int \varphi \xi d\xi - \bar{\varphi} \int \Phi \xi d\xi \right) = 0.$$

Le dernier terme est identiquement nul; le premier disparaît également si les deux potentiels considérés ont trait à des pales de même profondeur fictive, ce qui entraîne comme pour l'hélice :

$$\int_{\xi_0}^1 (\Phi i - \varphi I) (\lambda^2 + \xi^2) d\xi = 0.$$

Il en résulte que les propriétés de symétrie des représentations intégrales des potentiels hélicoïdaux (1.2.7.) sont encore valables quand ces potentiels sont adjoints, non plus à une hélice en fluide illimité, mais à une machine axiale en veine cylindrique.

3.3.2. Répartition optimum. — Les caractéristiques globales de puissance et de poussée de la machine s'obtiennent par les intégrations habituelles :

$$C'_0 = 2p \int_{\xi_0}^1 \left(\lambda + v - \frac{p\bar{\Gamma}}{4\pi\lambda} \right) \Gamma \xi d\xi$$

$$C'_T = 2p \int_{\xi_0}^1 (\xi + u) \Gamma d\xi ;$$

la perte d'énergie induite a pour expression :

$$C_E^i = 2p \int_{\xi_0}^1 (v\xi - \lambda u) \Gamma d\xi - \frac{p}{2\pi\lambda} (1 - \xi_0^2) \bar{\Gamma}^2.$$

Si l'on remarque que le terme principal du coefficient de puissance est proportionnel à $\bar{\Gamma}$, on voit que la recherche d'une perte induite minimum pour une valeur donnée de ce terme principal s'obtient en écrivant que les variations δC_E^i et $\delta \bar{\Gamma}$ relatives à une distribution variée arbitraire $\Gamma + \delta \Gamma$ sont proportionnelles; en utilisant dans le calcul de δC_E^i les propriétés de symétrie précédemment indiquées, on obtient la condition d'optimum sous la forme :

$$(III, 12) \quad v = \theta \frac{\xi^2}{\lambda^2 + \xi^2},$$

θ étant une constante arbitraire; d'où la propriété (1) : *le potentiel hélicoïdal adjoint au fonctionnement d'un ventilateur optimum induit les mêmes vitesses que l'hélice optimum au même fonctionnement λ , la vitesse axiale étant compensée dans son ensemble par le contre-souffle.*

3.3.3. Formules générales des ventilateurs optima. Soit

$$\Gamma = \frac{4\pi\lambda}{p} \theta \Gamma^*(\xi, \lambda; \xi_0, p)$$

la répartition de circulation assurant la loi de vitesses axiales (III, 12); $\bar{\Gamma}^*$ désignant la valeur

moyenne $\frac{2}{1-\xi_0^2} \int_{\xi_0}^1 \Gamma^* \xi d\xi$, on obtient aisément les expressions suivantes des caractéristiques globales:

$$(III, 13) \quad \begin{aligned} C'_Q &= 4\pi \lambda^2 (1 - \xi_0^2) \theta \bar{\Gamma}^* + 8\lambda \pi \theta^2 \left[\frac{1 - \xi_0^2}{2} \bar{\Gamma}^* (1 - \bar{\Gamma}^*) + \lambda^2 \int_{\xi_0}^1 \frac{\xi \Gamma^*}{\lambda^2 + \xi^2} d\xi \right], \\ C'_T &= 4\pi \lambda (1 - \xi_0^2) \theta \bar{\Gamma}^* - 8\pi \lambda^2 \theta^2 \int_{\xi_0}^1 \frac{\xi \Gamma^*}{\lambda^2 + \xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

La connaissance des fonctions Γ^* ramène donc, comme pour l'hélice, le problème d'adaptation d'un ventilateur optimum à la détermination de θ par une équation du second degré; cette détermination peut être rendue rapide par l'utilisation de réseaux de paraboles $C'_Q(\theta)$ et $C'_T(\theta)$ analogues à ceux déjà utilisés, mais la présentation serait plus compliquée du fait du paramètre ξ_0 qui n'intervient pas dans le cas de l'hélice.

Enfin, on a la relation simple:

$$\frac{p}{4\pi\lambda} \Gamma = \theta \Gamma^*,$$

ce qui donne à l'angle induit total la forme

$$(III, 14) \quad \delta i = \theta (1 - \Gamma^*) \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2}$$

3.3.4. Détermination des solutions optima. — La méthode de développements en série de Goldstein (H.62) permet de déterminer les fonctions Γ^* ; elle se simplifie considérablement ici par suite de la réduction du champ d'étude des potentiels par les frontières de la veine; on vérifie en effet aisément que le potentiel hélicoïdal φ qui induit sur les pales la vitesse (III,12) en satisfaisant par ailleurs aux conditions (III,8) est susceptible du développement.

$$(III, 15) \quad \varphi = \frac{3}{2} \frac{\lambda \theta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(\xi)}{(2n+1)^2} \cos(2n+1) \frac{p\xi}{2},$$

où $y_n(\xi)$ est la solution de l'équation

$$y_n'' + \frac{1}{\xi} y_n' - \frac{(2n+1)^2 p^2}{4} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\xi^2} \right) y_n = - (2n+1)^2 \frac{p^2}{4}$$

qui a une dérivée nulle pour $\xi = \xi_0, \xi = 1$.

Si on pose $\frac{2n+1}{2} \frac{p\xi}{\lambda} = t, \frac{2n+1}{2} p = \nu, y_n(\xi) = y_\nu(t)$, l'équation devient:

$$(III, 16) \quad t^2 y''_\nu + t y'_\nu - (\nu^2 + t^2) y_\nu = -t^2;$$

son intégrale générale peut s'écrire au moyen de transcendentes classiques (H.62), mais la détermination par les conditions (III,8) des deux constantes arbitraires qui y figurent n'est guère praticable numériquement par suite du manque de tables des fonctions de Bessel et de Lommel; le procédé élémentaire suivant est par contre assez rapide.

Les singularités de (III,16) étant les points $(0, \infty)$, le développement de Taylor de la solution cherchée a, autour d'un point t quelconque un rayon de convergence égal à $|t|$; il suffit donc

par exemple de déterminer ce développement pour l'extrémité de pale $\xi = 1$ ($t = \frac{2n+1}{2} \frac{p}{\lambda} = t_1$) pour être assuré de sa convergence sur toute la pale. Ceci étant, faisons dans (III,16) et dans toutes les équations dérivées par rapport à t :

$$t = t_1, \quad y'_v(t_1) = 0, \quad y_v(t_1) = Y_v;$$

on obtient aisément en fonction de la variable Y_v les expressions des dérivées successives de y_v , qui sont de la forme, a_{vh} et b_{vh} étant des fonctions de t_1 :

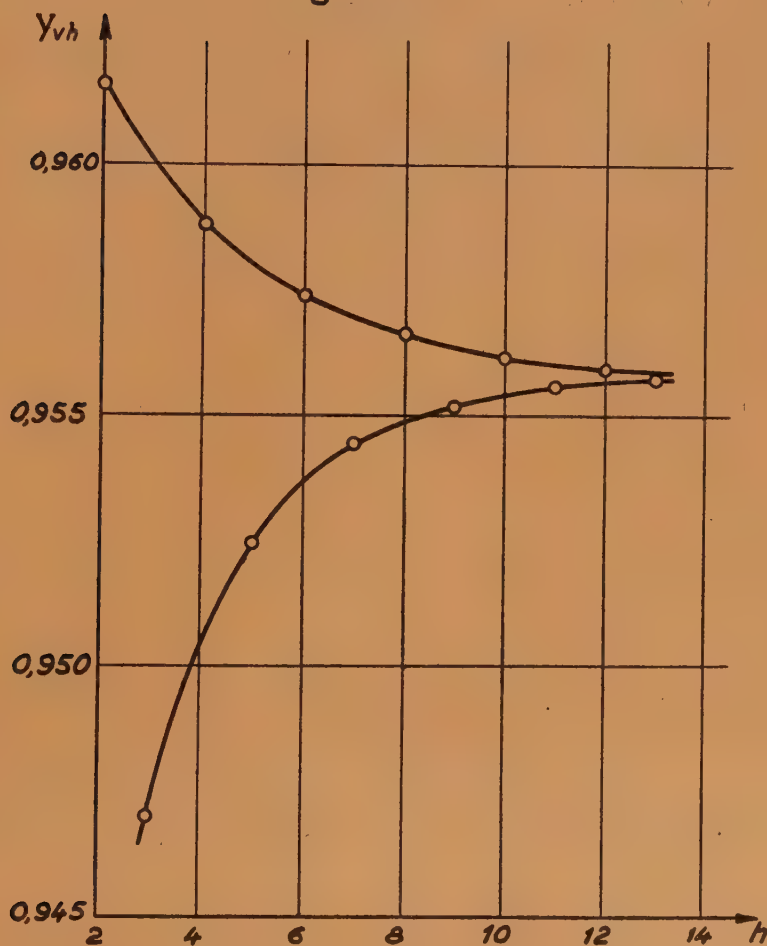
$$y^{(h)}_v(t_1) = a_{vh} Y_v + b_{vh}$$

$$\text{Posons: } t_0 = \frac{2n+1}{2} \frac{\xi_0}{\lambda}, \quad \delta = t_1 - t_0;$$

on a:

$$y_v(t_0) = Y_v + \frac{\delta^2}{2} y''_v(t_1) - \frac{\delta^3}{6} y'''_v(t_1) + \dots$$

Fig. 3.3.4.1a



Y_v est déterminé par la condition:

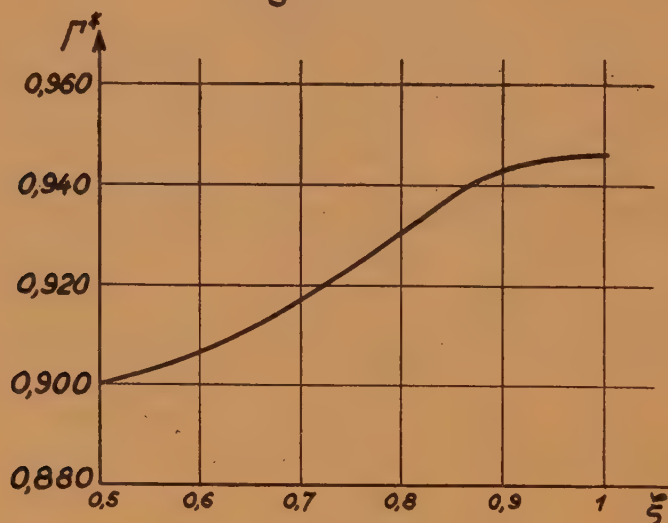
$$y_v(t_0) = \delta y_v(t_1) - \frac{\delta^2}{2} y_v''(t_1) + \dots = 0,$$

qui est linéaire en Y_v ; pour se rendre compte de l'approximation atteinte sur Y_v , il suffit de calculer les valeurs successives $Y_{v,h}$ obtenues en limitant le second membre de l'équation précédente au terme en $y_v^{(h)}$, valeurs qui convergent vers Y_v . Le calcul de y_v sur la pale se fait ensuite au moyen du développement de Taylor de t_1 , et ne présente pas de difficulté, bien que le nombre de termes nécessaire soit assez grand.

Par contre, il n'y a pas beaucoup de valeurs de v à considérer, la convergence du développement (III,15) étant très rapide.

3.3.4.1. Exemple. — Prenons le cas suivant: $\lambda = 0,2$; $\xi_0 = 0,5$; $p = 6$; on a pour le premier terme: $v = 3$; $t_0 = 7,5$; $t_1 = 15$; $\delta = 7,5$. La figure 3.3.4.1.a. indique la convergence des $Y_{v,h}$ vers Y_v en fonction de h , alternativement par excès et par défaut; Γ^* est représentée sur la figure 3.3.4.1.b. Nous pensons inutile de décrire ici les expériences de vérification du montage du

Fig. 3.3.4.1 b



Calculateur d'Hélices modifié pour le calcul des ventilateurs, qui s'effectuent aisément au moyen de telles solutions optima (cf. nos 2.3.).

3.3.5. Rappel des formules relatives aux distributions constantes de circulation. — Dans le cas classique où la circulation est constante en envergure, le champ des vitesses induites est purement tangentiel (3.1.3.2.):

$$V = 0, \quad U = -\frac{p\Gamma}{4\pi\xi} \quad (1),$$

ce qui conduit, d'après (I,20), à l'expression suivante de l'angle induit:

$$(III,14') \quad \delta i = \frac{p\Gamma\lambda}{4\pi} \cdot \frac{1}{\xi(\lambda^2 + \xi^2)}.$$

Enfin, les intégrations concernant les caractéristiques globales s'effectuent explicitement, et donnent les formules connues:

$$(III,13') \quad \begin{aligned} C'_0 &= p\Gamma\lambda(1 - \xi_0^2) \\ C'_T &= p\Gamma(1 - \xi_0^2) + \frac{p^2\Gamma^2}{2\pi} \log \xi_0. \end{aligned}$$

(1) Expression qu'on retrouve immédiatement d'après (III,9) en y faisant: $\Gamma = \bar{\Gamma}$, $V = 0$.

Si nous admettons, d'autre part, que l'évolution des cordes en envergure est telle que tous les profils travaillent au même c_x , on peut supposer que c_x est également constant en envergure; f désignant la finesse d'allongement infini du profil utilisé, on a pour les termes globaux dûs aux traînées de profil:

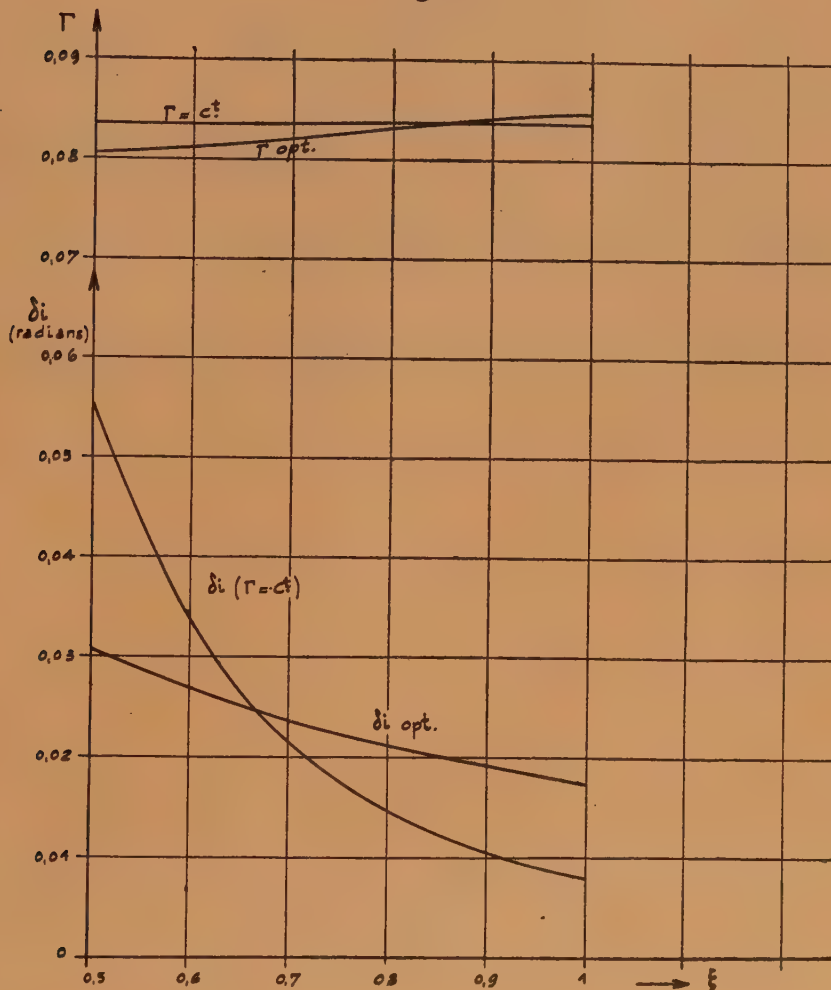
$$(III, 16) \quad C'_0 = \frac{2\rho\Gamma f}{3} (1 - \xi_0^2),$$

$$C'_T = 2\rho\Gamma\lambda f(1 - \xi_0).$$

3.3.6. Calculs comparés d'adaptation ⁽¹⁾. — Considérons les données d'adaptation:

$$C_0 = 0,080; \lambda = 0,2; \quad (\xi_0 = 0,5).$$

Fig 3.3.6



(1) R. SIESTRUNCK: Sur la Théorie des Ventilateurs simples et des soufflantes axiales; II^e Congrès National de l'Aviation Française, 1946.

3.3.6.1. Circulation constante. — Adoptons par exemple $f = 1/60$; les relations (III,13') et (III,16) donnent, en fonction de C_0 , la valeur suivante de la circulation:

$$p\Gamma = \frac{C_0}{\lambda(1 - \xi_0^2) + \frac{2}{3}f(1 - \xi_0^2)} = 0,501,$$

d'où $C_0^f = 0,0049$; $C_T^f = 0,0017$,

et finalement $C_T = 0,3192$,

soit un rendement global de 79,8 %.

3.3.6.2. Circulation optimum. — Ce calcul reste indépendant du nombre de pales tant que l'on ne cherche pas à préciser les caractéristiques géométriques des pales; la relation $c_t \sqrt{\lambda^2 + \xi^2} = 2\Gamma$ permet de voir que 6 pales peuvent convenir à l'adaptation proposée, si l'on travaille au voisinage de $c_s = 1$. Adoptons donc la solution 3.3.4.1. qui donne par les formules (III,13), lorsqu'on garde pour les termes de frottement la même valeur que précédemment:

$$\theta = 0,2135; C_T = 0,3402,$$

soit un rendement de 85,6 %. La figure 3.3.6. compare les répartitions de circulation et les angles induits obtenus par les deux méthodes.

Le gain de rendement induit est sensible du fait que le ventilateur est assez chargé (et justifie déjà l'emploi d'un distributeur ou d'un redresseur: dans ce cas, le rendement induit est théoriquement de 1 pour une adaptation à circulation constante, et le rendement total de l'ordre de 92 %). D'autre part, la valeur $\xi_0 = 0,5$ choisie ici est assez grande: dans tous les cas où les sections proches du moyeu sont actives, l'adaptation à circulation variable ne peut manquer d'améliorer nettement le rendement, puisque l'angle induit (III,14) tend vers zéro avec ξ , alors que dans (III,14'), δi croît indéfiniment.

Quoi qu'il en soit, et bien que la considération des machines axiales simples n'ait pas un intérêt pratique considérable, nous pensons que, de même que les méthodes développées pour l'hélice isolée ouvrent aisément la voie vers l'analyse du fonctionnement des multiplets coaxiaux, de même l'étude élémentaire que nous venons de faire peut servir de point de départ à une théorie du fonctionnement général des machines axiales composées.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LE PRINCIPE DE FRESNEL

Vu et approuvé :

Paris, le 18 Juin 1947

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Jean CABANNES

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH

Achevé d'imprimer
le 10 Novembre 1949
sur les presses de
l'imprimerie S.O.F.R.I.M.
17, Rue de Clignancourt
— PARIS-18° —

